BY GIMUSI 03/11/15

Insiemi 1

Argomenti: insiemi e operazioni tra insiemi **Difficoltà:** ⋆

Prerequisiti: notazioni insiemistiche, prodotto cartesiano, insieme delle parti

Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A = \{2, 4, g, \diamondsuit\}, \qquad B = \{2, g, 7, h, \heartsuit\}, \qquad C = \{\diamondsuit, 7, g\}.$$

Elencare gli elementi dei seguenti insiemi:

	a) Insieme	Elementi	b) Insieme	Elementi	c) Insieme	Elementi
1)	$A \cup B$	$2\ 4\ g\ \diamondsuit\ 7\ h\ \heartsuit$	$C \cup B$	$2\ g\ 7\ h\ \heartsuit\ \diamondsuit$	$A \cup B \cup C$	$2\ 4\ g\ \diamondsuit\ 7\ h\ \heartsuit$
2)	$A \cap B$	$2\ g$	$C \cap A$	$\diamondsuit\ g$	$B \cap C$	$7\ g$
3)	$A \cap B \cap C$	g	$C \cap (A \cup B)$	$\diamondsuit\ 7\ g$	$A \cup (B \cap C)$	$2\ 4\ g\ \diamondsuit\ 7$
4)	$A \setminus B$	$4\ \diamondsuit$	$B \setminus A$	$7\ h\ \heartsuit$	$A \triangle B$	$4\ \diamondsuit\ 7\ h\ \heartsuit$
5)	$B \setminus C$	$2\ h\ \heartsuit$	$C \setminus A$	7	$C \setminus (A \cup B)$	$\emptyset$
6)	$(A \cup B) \triangle C$	$2\ 4\ h\ \heartsuit$	$(A \cap B) \setminus C$	2	$(A \cup C) \setminus (A \cap C)$	$2\ 4\ 7$
7)	$(C \setminus A) \setminus B$	$\emptyset$	$C \setminus (A \setminus B)$	$7\ g$	$C \triangle (A \triangle B)$	$4\ h\ \heartsuit\ g$

Stabilire se le seguenti affermazioni (proposizioni) sono vere o false.

	a) Prop.	V/F	b) Prop.	V/F	c) Prop.	V/F
1)	$2 \in A$	V	$7 \notin A$	V	$2 \subseteq A$	F
2)	$\{2\} \subseteq A$	V	$\{2\} \in A$	F	$\{7, 7, g\} \subseteq C$	V
3)	$C \subseteq B$	F	$C \subseteq C$	V	$C \setminus C \subseteq A$	V
4)	$A \subseteq A \cup B$	V	$A \subseteq A \cap B$	F	$B \cap C \subseteq C$	V
5)	$(2, 2) \in A \times B$	V	$(2, 7) \in A \times B$	V	$(7, 2) \in B \times A$	V
6)	$(7, 2) \in A \times B$	F	$(\diamondsuit, \diamondsuit) \in A \times A$	V	$(\diamondsuit, 2) \notin A^2$	F
7)	$(\heartsuit, \heartsuit) \in B \times B$	V	$(\diamondsuit, \diamondsuit) \notin A \times C$	F	$(\diamondsuit, \diamondsuit) \in A^2 \cap C^2$	V
8)	$\{2, 2\} \in \mathcal{P}(A)$	F	$\{4, g\} \subseteq \mathcal{P}(A)$	V	$\{4, g\} \in \mathcal{P}(A)$	V
9)	$\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A)$	V	$A \in \mathcal{P}(A)$	V	$A \subseteq \mathcal{P}(A)$	V
10)	$(2, g) \in \mathcal{P}(A^2)$	F	$\{2, g\} \in \mathcal{P}(A^2)$	F	$\{(2, g)\} \in \mathcal{P}(A^2)$	V
11)	$\emptyset \in A$	F	$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	V	$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$	V

Capire come sono fatti i seguenti insiemi:

$$A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}, \qquad B_1 = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\}, \qquad B_2 = \{x^2 : x \in \mathbb{Z}\}, \qquad B_3 = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\},$$

$$C_1 = \{3x + 1 : x \in \mathbb{N}\}, \qquad C_2 = \{3x + 1 : x \in \mathbb{R}\}, \qquad C_3 = \{3x + 1 : x \in \{2, 4, 7\}\},$$

$$D_1 = \{n \in : \exists m \in \mathbb{N} \quad n = m^2\}, \qquad D_2 = \{n \in : \forall m \in \mathbb{N} \quad n = m^2\}.$$

$m \in \mathbb{N}$ $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ $m \in \mathbb{N}$ $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$

1/5

Funzioni 1

Argomenti: iniettività e surgettività **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

Nella seguente tabella vengono presentate varie "leggi" che talvolta definiscono funzioni $f : A \to B$ tra gli insiemi indicati. Stabilire caso per caso se si tratta di funzioni iniettive e/o surgettive (e precisare invece quando non si tratta di funzioni).

		a		b		c	
	Legge	$A \to B$	I/S	$A \to B$	I/S	$A \to B$	I/S
1)	$2x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	IS	$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$	I	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	I
2)	x^2	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	S	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$	I
3)	x^2	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$[0,1] \to [0,1]$	IS	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I
4)	x^2	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$	X	$[-1,1] \to [-1,1]$	—
5)	x^3	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	IS	$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	IS	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	I
6)	x^3	$[-1,1] \to [-1,1]$	IS	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	I	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I
7)	x^{-1}	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	I	$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$	IS	$(0,1) \to (1,+\infty)$	IS
8)	$\lvert x-3 \rvert$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	S	$\mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$	I
9)	2^x	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	I	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$	IS	$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$	I
10)	2^x	$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$	I	$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	X	$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{>0}$	I
11)	$\log_2 x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	X	$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$	IS	$(0,1) \to \mathbb{R}_{<0}$	IS
12)	$\sin x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	S	$[0,\pi] \to [-1,1]$	—
13)	$\sin x$	$[0,\pi/2] \to [0,1]$	IS	$[-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$	IS	$[-\pi/2,0] \to \mathbb{R}$	I
14)	$\sin x$	$[0,1] \to [0,1]$	I	$[0,2] \to [0,1]$	S	$[0,3] \to [0,1]$	S
15)	$\cos x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	S	$[0,\pi] \to [-1,1]$	IS
16)	$\cos x$	$[0,\pi/2] \to [0,1]$	IS	$[0,\pi] \to [0,1]$	X	$[0,1] \to [0,1]$	I
17)	$\tan x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}$	IS	$(0,\pi/2) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	I
18)	$2^{\cos x}$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$[0,\pi] \to \mathbb{R}$	I	$\mathbb{R} \to [1/2,2]$	S
19)	$\cos(2^x)$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	S	$\mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$	—
20)	$\cos^3 x^2$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	—	$[0,\pi] \to [-1,1]$	S	$[0,1] \to [0,1]$	I

2/5

Funzioni 2

Argomenti: immagine e controimmagine **Difficoltà:** ⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

In ogni riga della seguente tabella vengono presentate delle funzioni, tutte pensate come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si chiede di determinare immagine e controimmagine degli insiemi indicati.

	Funzione	D	$f(D)$	E	$f^{-1}(E)$
1)	x^2	$[-2, 1]$	$[0,4]$	$[-2, 1]$	$[-1,1]$
2)	x^2	$[1, 2]$	$[1,4]$	$[1, 2]$	$[-1,-\sqrt{2}]\cup[1,\sqrt{2}]$
3)	x^2	$[-2, -1]$	$[1,4]$	$[-2, -1]$	$\emptyset$
4)	$(x-3)^2$	$[0, 1]$	$[4,9]$	$[0, 1]$	$[2,4]$
5)	$x^2 - 3$	$[0, 1]$	$[-3,-2]$	$[0, 1]$	$[-2,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2]$
6)	$\lvert x+2\rvert$	$[-3, -2]$	$[0,1]$	$(1, +\infty)$	$(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$
7)	$\lvert\lvert x\rvert - 3\rvert$	$[-1, 4]$	$[0,3]$	$(1, 4]$	$(-\infty,-4)\cup(-2,2)\cup(4,+\infty)$
8)	$\lvert x^2 - 3\rvert$	$\{3, 4\}$	$\{6,13\}$	$\{3, 4\}$	$\{-\sqrt{19},-2\sqrt{3},0,2\sqrt{3},\sqrt{19}\}$
9)	$\lvert x^2 - 3\rvert$	$[-1, 1]$	$[2,3]$	$[-1, 1]$	$[-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2]$
10)	$\sqrt{\lvert x\rvert}$	$(-1, 1)$	$[0,1)$	$(-1, 1)$	$(-1,1)$
11)	3^x	$\mathbb{R}$	$(0,+\infty)$	$\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$
12)	3^x	$(0, 1)$	$(1,3)$	$(0, 1)$	$(-\infty,0)$
13)	3^x	$\{0, 1\}$	$\{1,3\}$	$\{0, 1\}$	$\{0\}$
14)	$\lvert 2^x - 2\rvert$	$[0, 2]$	$[0,2]$	$[0, 2]$	$(-\infty,2]$
15)	$2^{\lvert x\rvert}$	$(-\infty, 0]$	$[1,+\infty)$	$[2, 4]$	$[-2,-1]\cup[1,2]$
16)	$\log_3(9 + \lvert x+9\rvert)$	$(-\infty, -1)$	$\emptyset$	$(1, +\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
17)	$\sin x$	$(0, 1)$	$(0, \sin 1)$	$(1, 4)$	$\emptyset$
18)	$\sin x$	$(0, 3)$	$(0,1]$	$(-3, 3)$	$(-\infty,+\infty)$
19)	$2^{\sin x}$	$\mathbb{R}$	$[1/2,2]$	$(2, +\infty)$	$\emptyset$
20)	$\sin 2^x$	$(0, 2\pi)$	$[-1,1]$	$[0, 1/2]$	*
21)	$\sqrt[4]{\lvert\cos x\rvert}$	$[0, 4]$	$[0,1]$	$[0, 4]$	$(-\infty,+\infty)$
22)	$\lvert\sin x - 1\rvert$	$[0, \pi]$	$[0,1]$	$\{1\}$	$\{n\pi\}$

* $(-\infty, \log_2 \frac{\pi}{6}) \cup (\log_2 \frac{5\pi}{6}, \log_2 \pi)$, $(\log_2 2k\pi, \log_2(2k\pi + \frac{\pi}{6})) \cup (\log_2[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}], \log_2(2k+1)\pi)$ $k \geq 1$

3/5

Funzioni 3

Argomenti: equazioni con parametro **Difficoltà**: ⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

Determinare gli insieme costituiti dai valori del parametro reale λ per cui le seguenti equazioni hanno, rispettivamente, zero, una, due o infinite soluzioni (reali distinte).

	Equazione	0 sol.	1 sol.	2 sol.	∞ sol.
1)	$x^2 = \lambda$	$(-\infty,0)$	$\{0)$	$(0,+\infty)$	$\emptyset$
2)	$x^{33} = \lambda$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$
3)	$x^{2014} = \lambda$	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	$(0,+\infty)$	$\emptyset$
4)	$8^x = \lambda$	$(-\infty,0]$	$(0,+\infty)$	$\emptyset$	$\emptyset$
5)	$\log_7 x = \lambda$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$
6)	$\sin x = \lambda$	$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[-1,1]$
7)	$\arctan x = \lambda$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$
8)	$\cos^3 x^2 = \lambda$	$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[-1,1]$
9)	$\lvert x-7\rvert = \lambda$	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	$(0,+\infty)$	$\emptyset$
10)	$\lvert x^2-x\rvert = \lambda$	$(-\infty,0)$	$\emptyset$	$\{0\}\cup(1/4,+\infty)$	$\emptyset$
11)	$\log_5\lvert x\rvert = \lambda$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$
12)	$\lvert\log_5 x\rvert = \lambda$	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	$(0,+\infty)$	$\emptyset$
13)	$x^2-\lvert x-3\rvert = \lambda$	$(-\infty,-\frac{13}{4})$	$\{-\frac{13}{4}\}$	$(-\frac{13}{4},+\infty)$	$\emptyset$
14)	$\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert = \lambda$	$(-\infty,1)$	$\emptyset$	$(1,+\infty)$	$\{1\}$
15)	$\lvert x-1\rvert-\lvert x-2\rvert = \lambda$	$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	$(-1,1)$	$\emptyset$	$\{-1,1\}$
16)	$\lvert\lvert x-7\rvert-6\rvert = \lambda$	$(-\infty,0)$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$
17)	$7^{\lvert 3-x\rvert} = \lambda$	$(-\infty,1)$	$\{1\}$	$(1,+\infty)$	$\emptyset$
18)	$\log_3(x^2+9) = \lambda$	$(-\infty,2)$	$\{2\}$	$(2,+\infty)$	$\emptyset$
19)	$\arccos^2(7^{x^3}) = \lambda$	$(-\infty,0)\cup[\frac{\pi^2}{4},+\infty)$	$[0,\frac{\pi^2}{4})$	$\emptyset$	$\emptyset$
20)	$3^x = 2^\lambda+\lambda^2$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$
21)	$\arccos(x+2^\lambda) = \lambda$	$\emptyset$	$[0,\pi]$	$\emptyset$	$\emptyset$
22)	$x^2-x = \lambda^2-\lambda$	$\emptyset$	$\{1/2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\emptyset$

4/5

Funzioni 4

Argomenti: funzioni pari, dispari, periodiche **Difficoltà:** ⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, funzioni reali elementari

---

Determinare se le seguenti funzioni sono pari/dispari/periodiche (nel caso di funzioni periodiche si richiede di indicare il minimo periodo). Tutte le funzioni si intendono definite sul più grande insieme in cui hanno senso ed a valori in $\mathbb{R}$.

a b

	Funzione	Pari	Disp.	Per.	Funzione	Pari	Disp.	Per.
1)	x^{22}	X	—	—	x^{33}	—	X	—
2)	$x^{22}+x^{33}$	—	—	—	$x^{33}-x^{55}$	—	X	—
3)	x^{-22}	X	—	—	x^{-33}	—	X	—
4)	$\sqrt{x}$	—	—	—	$\sqrt[3]{x}$	—	X	—
5)	$\sqrt{\lvert x\rvert}$	X	—	—	$\lvert\sqrt[3]{x}\rvert$	X	—	—
6)	$\lvert x^2-x\rvert$	—	—	—	$x^2-\lvert x\rvert$	X	—	—
7)	$\lvert x^3-x\rvert$	X	—	—	$\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$	X	—	—
8)	$\sin(x^2)$	X	—	—	$\sin^2 x$	X	—	π
9)	$\sin(x^3)$	—	X	—	$\sin^3 x$	—	X	2π
10)	$\cos(x^2)$	X	—	—	$\cos^2 x$	X	—	π
11)	$\cos(x^3)$	X	—	—	$\cos^3 x$	X	—	2π
12)	$\sin x+\cos x$	—	—	2π	$\sin\lvert x\rvert$	X	—	—
13)	$\sin\lvert x\rvert$	X	—	—	$\lvert\sin x\rvert$	X	—	π
14)	$\cos\lvert x\rvert$	X	—	2π	$\lvert\cos x\rvert$	X	—	π
15)	$\sin(\sin x)$	—	X	2π	$\sin(\cos x)$	—	X	2π
16)	$\cos(\sin x)$	X	—	π	$\cos(\cos x)$	X	—	π
17)	$\arctan\lvert x\rvert$	X	—	—	$\lvert\arctan x\rvert$	X	—	—
18)	$3^{\sin x}$	—	—	2π	$3^{\cos x}$	X	—	2π
19)	$\cos(7x)$	X	—	$2\pi/7$	$\tan\lvert x/3\rvert$	X	—	—
20)	2^{x^2}	X	—	—	$3^{2-\lvert x\rvert}$	X	—	—
21)	$\arctan(x-\sin x)$	—	X	—	$\sin(2^{\lvert x\rvert})$	X	—	—
22)	$\arctan(x-\cos x)$	—	—	—	$\sin(2^x)$	—	—	—

5/5