per cui $w_1+w_2=f(v_1)+f(v_2)=f(v_1+v_2)\Rightarrow(w_1+w_2)\in Im(f)$

1.2) Se $w\in Im(f)$ e $a\in K$

allora: $\exists v\in V$ t.c.: $f(v)=w$

per cui $aw=af(v)=f(av)=aw\Rightarrow aw\in Im(f)$

Teo(dimensione di $ker(f)$ e $Im(f)$)

Sia $f:V\rightarrow W$ un'applicazione lineare

Supponiamo che V abbia dimensione finita

allora: $dim(ker(f))+dim(Im(f))=dim V$

Dim

Sia $n=dim V$

sia $K=dim(ker(f))$ con $K\leqslant n$

sia $\{v_1,\dots,v_k\}$ una base di $ker(f)$

allora: $\{v_1,\dots,v_k\}$ sono linearmente indipendenti in V

Per un teorema precedente posso aggiungere n-k elementiin modo da ottenere una base di V e siano tali elementi $v_{k+1},\dots,v_n$

Dico che $f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)$ sono una base di $Im(f)$ (n-k elementi di W)

Se lo dimostro ho finito

Devo fare 2 verifiche:

1) Verifico che generano tutta l'immagine:

Prendo $w\in Im(f)$

Per definizione $\exists v\in V: w=f(v)$ e scrivo v come combinazione lineare di $\{v_1,\dots,v_n\}$: $v=a_1v_1+\dots+a_kv_k+a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n$

Ma allora: $w=f(v)=a_1f(v_1)+\dots+a_kf(v_k)+a_{k+1}f(v_{k+1})+\dots+a_nf(v_n)$

ma $f(v_1)=\dots=f(v_k)=0$ poichè $f(v_1,\dots,v_k)\in ker(f)$

Quindi w è combinazione lineare di $f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)$

2) Verifico che $f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)$ sono linearmente indipendenti

Considero una loro combinazione lineare che sia nulla

$a_{k+1}f(v_{k+1})+\dots+a_nf(v_n)=0$

quindi $a_{k+1}f(v_{k+1})+\dots+a_nf(v_n)=0$ cioè $a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n\in ker(f)$

quindi è combinazione lineare di $v_1,\dots,v_k$ cioè:

$a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n=b_1v_1+\dots+b_kv_k$ ma allora:

$-b_1v_1-\dots-b_kv_k+a_{k+1}v_{k+1}+\dots+a_nv_n=0$

ma essendo i v_i tutti linearmente indipendenti

deve per forza essere $b_1=\dots=b_k=0=a_k+1=\dots=a_n$