BY GIMUSI 27/06/15

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = x^2 + y^4 - \alpha x y^2$.

   (a) Provare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$.

   (b) Provare che per $\alpha = 10$ si ha $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.

   (c) Stabilire per quali α la funzione f ammette minimo su $\mathbb{R}^2$ ed in tal caso calcolarlo, determinando anche i punti di minimo.

2. Sia V il solido di $\mathbb{R}^3$ ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse z del dominio D del piano yz definito da

$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 \leq 9, \, 0 \leq z \leq y\}.$$

   Calcolare il volume di V e l'area della sua superficie.

3. Determinare se converge

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\arctan(x^2 y)}{(x^2+y^2)^2} dx\, dy.$$

4. Sia γ la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t^2(1-t), t(1-t^2))$ con $0 \leq t \leq 1$.

   (a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.

   (b) Calcolare l'area del dominio racchiuso da γ.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = x^2 + y^4 - \alpha x y^2$.

(a) Provare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$.

(b) Provare che per $\alpha = 10$ si ha $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.

(c) Stabilire per quali α la funzione f ammette minimo su $\mathbb{R}^2$ ed in tal caso calcolarlo, determinando anche i punti di minimo.

a) $f(x,y) = x^2 + y^4 - \alpha x y^2$

$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y \to +\infty \\ x=0}} y^4 = +\infty \equiv \sup_{\mathbb{R}^2} f$$

b) $\alpha = 10 \quad f(x,y) = x^2 + y^4 - 10 x y^2$

RESTRIZIONE : $x = y^2 \rightsquigarrow f(y^2, y) = y^4 + y^4 - 10 y^4 = -8y^4$

$$\lim_{y \to +\infty} f(y^2, y) = \lim_{y \to +\infty} -8y^4 = -\infty$$

c) $f(x,y) = x^2 + y^4 - \alpha x y^2 = (x, y^2) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\alpha/2 \\ -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{DET}(A) = 1 - \frac{\alpha^2}{4} \begin{cases} > 0 & -2 < \alpha < +2 \\ = 0 & \alpha = \pm 2 \\ < 0 & |\alpha| > 2 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow f(x,y) \begin{cases} \text{DEF. POSITIVA} & -2 < \alpha < +2 \\ \text{SEMIDEF. POSITIVA} & \alpha = \pm 2 \\ \text{INDEFINITA} & |\alpha| > 2 \end{cases}$$

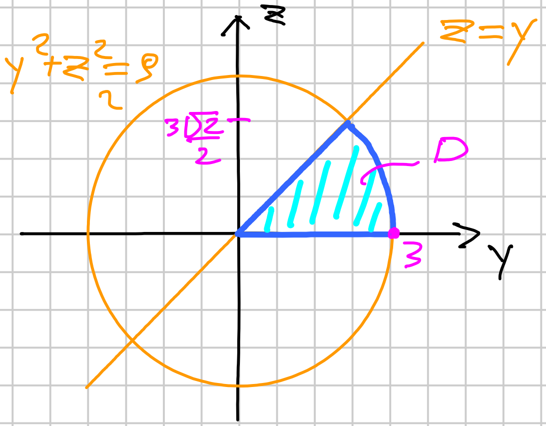
AMMETTE MINIMO

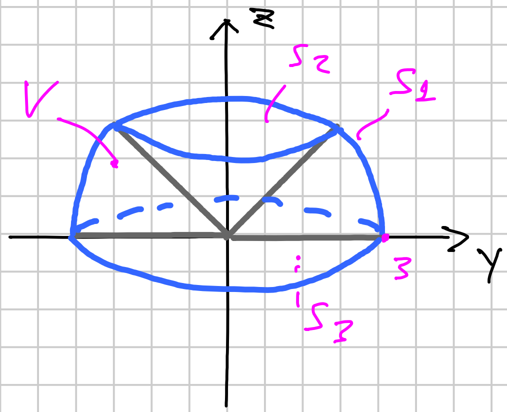
$$\rightsquigarrow \begin{cases} -2 < \alpha < +2 : & \text{MINIMO} \quad f(0,0) = 0 \\ \alpha = \pm 2 : & \begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^4 \mp 2xy^2 = (x \mp y^2)^2 \\ \alpha = 2 : \quad \text{MINIMO} \quad f(y^2, y) = 0 \\ \alpha = -2 : \quad \text{MINIMO} \quad f(-y^2, y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

2. Sia V il solido di $\mathbb{R}^3$ ottenuto da una rotazione completa intorno all'asse z del dominio D del piano yz definito da

$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 \le 9, \ 0 \le z \le y\}.$$

Calcolare il volume di V e l'area della sua superficie.





BARICENTRO DI D: $Y_G = \frac{1}{A}\int_D y\,dy\,dz$ $\quad A = \frac{1}{8}\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{8}\pi$

$$\int_D y\,dy\,dz = \int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\cos\theta\,[\rho^3/3]_0^3\,d\theta = 3\,[\sin\theta]_0^{\pi/4} = 3\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\parallel$$

$$(Y_G\cdot A)$$

$$\rightsquigarrow Y_G = \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{9}_{3}\pi}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt2}{\cancel{2}} = \frac{4\sqrt2}{3\pi}$$

TEOREMA DI GULDINO: $V = 2\pi Y_G\cdot A = \cancel{2}\pi\cdot\frac{3\sqrt2}{\cancel{2}} = 3\pi\sqrt2$

TEOREMA DI GULDINO: $S_i = 2\pi Y_{Gi}\,\ell_i$

S_1: $Y_{G1}\cdot\ell_1 = \int_0^{\pi/4} 3\cos\theta\cdot 3\,d\theta = 9\,[\sin\theta]_0^{\pi/4} = \frac{9\sqrt2}{2}$

$\rightsquigarrow S_1 = 2\pi\cdot\frac{9\sqrt2}{2} = 9\pi\sqrt2$

S_2: $Y_{G2}\cdot\ell_2 = \frac{3}{2}\frac{\sqrt2}{2}\cdot 3 = \frac{9}{4}\sqrt2 \rightsquigarrow S_2 = 2\pi\cdot\frac{9}{4}\sqrt2 = \frac{9}{2}\sqrt2\,\pi$

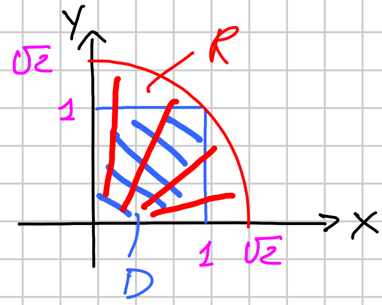
$S_3 = 9\pi \qquad \rightsquigarrow S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{27}{2}\sqrt2\,\pi + 9\pi$

3. Determinare se converge

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\arctan(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy.$$

$$\int_D \frac{\overset{\geq 0}{\arctan(x^2y)}}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy \leq \int_D \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\leq \int_R \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_R \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^5}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$



$$= \int_0^{\sqrt2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta = \sqrt2\int_0^{\pi/2} -\cos^2\theta\,d(\cos\theta) = \sqrt2\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt2}{3}$$

⇝ L'INTEGRALE CONVERGE

4. Sia γ la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t^2(1-t), t(1-t^2))$ con $0 \leq t \leq 1$.

(a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.

(b) Calcolare l'area del dominio racchiuso da γ.

a) $\gamma(0) = (0,0) = \gamma(1)$ ⇝ γ È CHIUSA

SIA $s \neq \sigma$ $\gamma(s) = \gamma(\sigma)$ ⇝ $\begin{cases} \sigma^2(1-\sigma) = s^2(1-s) \\ \sigma(1-\sigma^2) = s(1-s^2) \end{cases}$

$\begin{cases} \sigma^2 - s^2 = \sigma^3 - s^3 \\ \sigma - s = \sigma^3 - s^3 \end{cases}$ ⇝ $\begin{cases} \overset{1}{\cancel{\sigma - s}} = \sigma^2 - s^2 = \cancel{(\sigma - s)}(\sigma + s) \\ (\sigma \neq s) \rightsquigarrow \sigma + s = 1 \qquad s = 1 - \sigma \end{cases}$

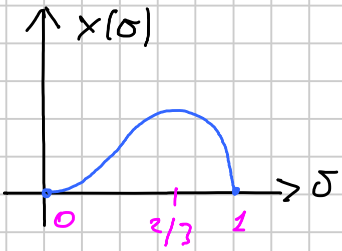
⇝ $\begin{cases} \sigma^2(1-\sigma) = s^2(1-s) = (1-\sigma)^2\sigma \qquad \sigma^2 - \sigma^3 = \sigma - 2\sigma^2 + \sigma^3 \\ 2\sigma^3 - 3\sigma^2 + \sigma = 0 \qquad \sigma(2\sigma^2 - 3\sigma + 1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sigma = 0 \qquad s = 1 \\ \sigma = \dfrac{3 \pm 1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

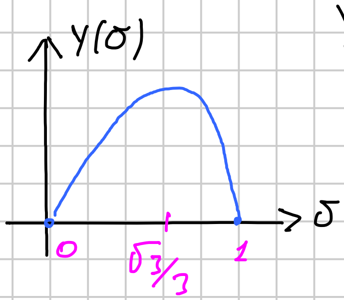
⇝ $\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \sigma = 0 & s = 1 \\ \sigma = 1 & s = 0 \end{array}\right\} \gamma \text{ CHIUSA} \\ \sigma = 1/2 \quad s = 1/2 \quad (s = \sigma) \end{cases}$ ⇝ γ É SEMPLICE

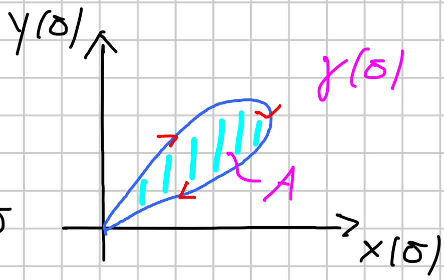
$$\gamma(\sigma) = (\overset{x(\sigma)}{\sigma^2(1-\sigma)}, \overset{y(\sigma)}{\sigma(1-\sigma^2)})$$

$$x(\sigma) = \sigma^2(1-\sigma) \qquad x'(\sigma) = 2\sigma - 3\sigma^2 = 0 \quad \begin{cases} \sigma = 0 \\ \sigma = 2/3 \end{cases}$$

$$y(\sigma) = \sigma(1-\sigma^2) \qquad y'(\sigma) = 1 - 3\sigma^2 = 0 \qquad \sigma = \sqrt{3}/3$$







b) TEOREMA DI GG: $$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VERSO CONTRARIO}}}{-}\oint_\gamma x\,dy = -\int_0^1 \sigma^2(1-\sigma)(1-3\sigma^2)\,d\sigma =$$

$$= -\int_0^1 (\sigma^2 - 3\sigma^4 - \sigma^3 + 3\sigma^5)\,d\sigma = -\left[\frac{\sigma^3}{3} - \frac{3}{5}\sigma^5 - \frac{\sigma^4}{4} + \frac{1}{2}\sigma^6\right]_0^1 =$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{20-36-15+30}{60} = \frac{1}{60}$$