Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 24 Novembre 2013

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (1, 0, -2), \qquad B = (1, 2, -1), \qquad C = (-1, 1, 0), \qquad D = (-3, 2, 1).$$

   (a) Determinare la proiezione di D sul piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare le rette che passano per D ed intersecano la retta AB formando un angolo di $60°$.

   (c) Determinare l'equazione del piano che passa per C e per D ed è parallelo alla retta AB.

2. Sia $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = x - y + z - w = 0\}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

   (a) Determinare basi ortonormali per V e $V^\perp$.

   (b) Determinare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

3. Consideriamo le seguenti tre condizioni:

$$f(1, -2, 3) = (1, 0, \alpha), \qquad f(1, 0, \beta) = (2, 3, 4), \qquad f(1, \beta, 1) = (3, 4, 5).$$

   (a) Discutere, al variare dei parametri reali α e β, l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che verifica le tre proprietà.

   (b) Nei casi in cui l'applicazione esiste, determinare, sempre in funzione di α e β, la dimensione del nucleo di f.

4. Scrivere un sistema di 5 equazioni in 4 incognite che verifica contemporaneamente le seguenti due condizioni:

   - nessuna equazione del sistema è multipla di un'altra equazione del sistema,
   - la soluzione del sistema sono tutti e soli i vettori del tipo

$$(x, y, z, w) = (t + 3, 2t - 1, t - 4, 5t - 2).$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.