BY GIMUSI 01/06/15

Test 197	V	F	F	F	F	F	V	F	E	C	B	C	A	B	A	C
	VF1	VF2	VF3	VF4	VF5	VF6	VF7	VF8	MC1	MC2	MC3	MC4	MC5	MC6	MC7	MC8

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Test d'esame di Analisi Matematica II

♢ Questo test è composto da 8 domande di tipo Vero–Falso (per le quali la risposta va scelta tra V ed F), e da 8 domande Multiple–Choice (per le quali la risposta va scelta tra A, B, C, D, E).

♡ Le risposte devono essere indicate senza ambiguità nella griglia in cima a questa pagina.

♣ Il tempo a disposizione è di 30 minuti.

♠ Il punteggio per tutte le 16 domande è: risposta MANCANTE = 0, SBAGLIATA = −2, ESATTA = +2.

Sezione Vero-Falso

VF1 La retta tangente alla curva $\gamma(t) = (t^2, 2t)$ nel punto $t = 1$ è la retta $y = x + 1$ V

VF2 La curva $(\sin^2 t, t^2)$ con $-1 \le t \le 1$ è semplice F

VF3 La funzione $y \cos(x)$ ha minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$ F

VF4 La forma quadratica $x^2 + 2y^2 - 4xy$ è definita positiva F

VF5 L'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ xyz \le 4, \ |z| \le 1\}$ è limitato F

VF6 La forma $xy(dx + dy)$ è esatta F

VF7 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $(1, \lambda, 1)$ ha norma 4 V

VF8 $x^4 + y^4 + 4x^2y = o((x^2 + y^2)^{3/2})$ per $(x, y) \to (0, 0)$ F

Sezione Multiple-Choice

MC1 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{(1 + |y|)^{\alpha - 1}}{(x^2 + y^2)^4}\, dx\, dy < +\infty$$

(A) Se e solo se $0 < \alpha < 6$ (B) Se e solo se $0 < \alpha < 1$ (C) Se e solo se $\alpha > 1$

(D) Mai $\boxed{\text{(E) Se e solo se } 0 < \alpha < 7}$

Università di Pisa – Test creato con TestGenerator 2011 © by Massimo Gobbino

$\boxed{\text{MC2}}$ Sia $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq y\}$. Allora $\int_D 1\, dx\, dy\, dz = \dots$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{(C) } \frac{1}{6}}$ (D) 1 (E) $\frac{1}{3}$

$\boxed{\text{MC3}}$ Consideriamo la curva $\gamma(t) = (3t^2, t)$ definita per $0 \leq t \leq 1$. Allora $\int_\gamma 7x\, ds =$

(A) 21 $\boxed{\text{(B) } 21 \int_0^1 t^2 \sqrt{36t^2 + 1}\, dt}$ (C) 7 (D) 28 (E) $21 \int_0^1 t^2 \sqrt{9t^4 + t^2}\, dt$

$\boxed{\text{MC4}}$ Sia $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$. Allora $\int_B 7z\, dx\, dy\, dz = \dots$

(A) $7 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$ (B) $14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2\alpha\, d\alpha$

$\boxed{\text{(C) } 14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha}$ (D) 0 (E) $7 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$

$\boxed{\text{MC5}}$ Consideriamo il dominio $D = [1, +\infty[\times [0, +\infty[$. Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$, con $(x,y) \in D$.

$$f(x,y) = xy, \quad g(x,y) = x - y, \quad h(x,y) = x + y.$$

$\boxed{\text{(A) Solo } h}$ (B) Nessuna (C) Tutte (D) Solo f (E) Solo f e h

$\boxed{\text{MC6}}$ Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Allora $\min_D 3x =$

(A) -12 $\boxed{\text{(B) } -6}$ (C) -3 (D) 0 (E) 3

$\boxed{\text{MC7}}$ Consideriamo il vettore $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e la funzione $f(x,y) = x^3 + y$. Allora $\frac{\partial f}{\partial v}(2,2) =$

$\boxed{\text{(A) } 6 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ (B) 6 (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\text{MC8}}$ Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B y^2\, dx\, dy, \quad \int_B y^3\, dx\, dy, \quad \int_B y^4\, dx\, dy, \quad \int_B y^5\, dx\, dy$$

(A) 2 (B) 4 $\boxed{\text{(C) } 0}$ (D) 1 (E) 3

Sezione Vero-Falso

$\boxed{\text{VF1}}$ La retta tangente alla curva $\gamma(t) = (t^2, 2t)$ nel punto $t = 1$ è la retta $y = x + 1$ V

$v(t) = \dot\gamma(t) = (2t, 2)$ $\quad v(1) = (2,2)$ $\rightsquigarrow$ $y = x + c$

$\gamma(1) = (1,2)$ $\rightsquigarrow$ $2 = 1 + c$ $\quad c = 1$ $\rightsquigarrow$ $y = x + 1$

$\boxed{\text{VF2}}$ La curva $(\sin^2 t, t^2)$ con $-1 \le t \le 1$ è semplice F

$(\sin^2 t, t^2) = (\sin^2(-t), (-t)^2) \quad \forall t \in (-1,1)$ $\rightsquigarrow$ NON È SEMPLICE

$\boxed{\text{VF3}}$ La funzione $y\cos(x)$ ha minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$ F

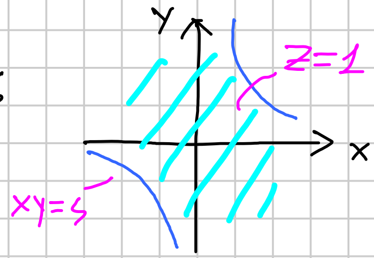
$\lim\limits_{\substack{y \to +\infty \\ x=0}} y\cos x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{y \to -\infty \\ x=0}} y\cos x = -\infty$ $\rightsquigarrow$ NON HA MIN ASSOLUTO

$\boxed{\text{VF4}}$ La forma quadratica $x^2 + 2y^2 - 4xy$ è definita positiva F

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 2 - 4 = -2$ $\rightsquigarrow$ $\lambda_1 > 0$ $\quad \lambda_2 < 0$ $\rightsquigarrow$ A INDEFINITA

$\boxed{\text{VF5}}$ L'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ xyz \le 4, \ |z| \le 1\}$ è limitato F

$z = 1$ $\quad xy \le 4$



$\rightsquigarrow$ NON LIMITATO

$\boxed{\text{VF6}}$ La forma $xy(dx + dy)$ è esatta F

MODO 1 $\quad f_x = xy$ $\rightsquigarrow$ $f = \frac{1}{2}x^2y + g(y)$ $\quad f_y = \frac{1}{2}x^2 + g'(y) = xy$ $\rightsquigarrow$ IMPOSSIBILE

MODO 2 $\quad (A,B) = \nabla f$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{rot}(A,B) = \mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ $\quad B_x - A_y = y - x \neq 0$

$\boxed{\text{VF7}}$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $(1, \lambda, 1)$ ha norma 4 V

$\|(1,\lambda,1)\| = (1 + \lambda^2 + 1)^{1/2} = 4$ $\rightsquigarrow$ $\lambda^2 + 2 = 16$ $\quad \lambda^2 = 14$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{14}$

$\boxed{\text{VF8}}$ $x^4 + y^4 + 4x^2y = o((x^2 + y^2)^{3/2})$ per $(x,y) \to (0,0)$

$4x^2y \neq o((x^2+y^2)^{3/2})$ $\quad$ INFATTI $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ NON ESISTE

Sezione Multiple-Choice

MC1 Sia $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ e sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_B \frac{(1+|y|)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2)^4}\, dx\, dy < +\infty$$

(A) Se e solo se $0 < \alpha < 6$ **(B)** Se e solo se $0 < \alpha < 1$ **(C)** Se e solo se $\alpha > 1$

(D) Mai $\boxed{\textbf{(E)} \text{ Se e solo se } 0 < \alpha < 7}$

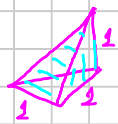
$\alpha < 1$ $$= \int_B \frac{dx\,dy}{(1+|y|)^{1-\alpha}(x^2+y^2)^4} \leq \int_B \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^4} = \int_B \frac{1}{\rho^{\cancel{8}\,7}} \cancel{\rho}\, d\rho\, d\theta < +\infty \quad \forall \alpha$$

$\alpha \geq 1$ $$= \int_B \frac{(1+\rho|\sin\theta|)^{\alpha-1}}{\rho^7}\, d\rho\, d\theta \leq \int_B \frac{(2\rho)^{\alpha-1}}{\rho^7}\, d\rho\, d\theta < +\infty \quad \begin{cases} \text{SE } 8-\alpha > 1 \\ \rightsquigarrow \alpha < 7 \end{cases}$$

MC2 Sia $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq y\}$. Allora $\int_D 1\, dx\, dy\, dz = \ldots$

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{(C)}\ \frac{1}{6}}$ **(D)** 1 **(E)** $\frac{1}{3}$

MODO 1 $$= \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x y\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = 1/6$$



MODO 2 $$V_{PIRAMIDE} = \frac{\text{BASE} \cdot \text{ALTEZZA}}{3} = \frac{1}{3}(1/2) \cdot 1 = 1/6$$

MC3 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (3t^2, t)$ definita per $0 \leq t \leq 1$. Allora $\int_\gamma 7x\, ds =$

(A) 21 $\boxed{\textbf{(B)}\ 21 \int_0^1 t^2\sqrt{36t^2+1}\, dt}$ **(C)** 7 **(D)** 28 **(E)** $21 \int_0^1 t^2 \sqrt{9t^4 + t^2}\, dt$

$$ds = \left[(6\sigma)^2 + 1^2\right]^{1/2} d\sigma = \sqrt{36\sigma^2+1}\, d\sigma \qquad = \int_0^1 7 \cdot 3\sigma^2 \sqrt{36\sigma^2+1}\, d\sigma$$

MC4 Sia $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$. Allora $\int_B 7z\, dx\, dy\, dz = \ldots$

(A) $7\int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$ **(B)** $14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin^2\alpha\, d\alpha$

$\boxed{\textbf{(C)}\ 14\pi \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha}$ **(D)** 0 **(E)** $7 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 7\rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 14\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \cos\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

5/5

MC5 Consideriamo il dominio $D = [1, +\infty[\times [0, +\infty[$. Stabilire QUALI delle seguenti funzioni ammettono limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$, con $(x, y) \in D$.

$$f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = x - y, \quad h(x, y) = x + y.$$

$\boxed{\text{(A) Solo } h}$ (B) Nessuna (C) Tutte (D) Solo f (E) Solo f e h

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y = 0}} xy = 0 \qquad \lim_{\substack{y \to +\infty \\ x = 1}} x - y = -\infty$$

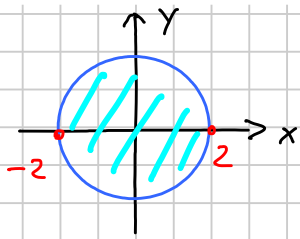
$$1 \leq \cos\theta + \sin\theta \leq \sqrt{2}$$

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x + y = \lim_{\substack{\rho \to +\infty \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} \rho(\cos\theta + \sin\theta) = +\infty$$

MC6 Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Allora $\min_D 3x =$

(A) -12 $\boxed{\text{(B) } -6}$ (C) -3 (D) 0 (E) 3

$$MIN_D\, 3x = 3x_{MIN} = 3 \cdot (-2) = -6$$



MC7 Consideriamo il vettore $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e la funzione $f(x, y) = x^3 + y$. Allora $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 2) =$

$\boxed{\text{(A) } 6 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ (B) 6 (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle \qquad \nabla f = (3x^2, 1) \qquad \nabla f(2,2) = (12, 1) \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial v}(2,2) = 6 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

MC8 Sia $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. Stabilire QUANTI dei seguenti integrali sono nulli.

$$\int_B \overbrace{y^2 \, dx\, dy}^{>0}, \quad \int_B \overbrace{y^3 \, dx\, dy}^{>0}, \quad \int_B \overbrace{y^4 \, dx\, dy}^{>0}, \quad \int_B \overbrace{y^5 \, dx\, dy}^{>0}$$

(A) 2 (B) 4 $\boxed{\text{(C) } 0}$ (D) 1 (E) 3