Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 17 Novembre 2013

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (1, 0, -2), \qquad B = (2, 3, 4), \qquad C = (-1, 2, 3).$$

   (a) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

   (c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB.
   Determinare l'intersezione tra r ed il piano xz e l'angolo che formano.

2. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = y - z + w = 0\}.$$

   (a) Dimostrare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

   (b) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(v) = -v$ per ogni $v \in V$ e $f(w) = 3w$ per ogni $w \in W$. Determinare quindi la matrice associata ad f nella base canonica.

3. Sia $M_{3\times3}$ lo spazio vettoriale delle matrici 3×3, e sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

   (a) Dimostrare che l'insieme delle matrici $A \in M_{3\times3}$ tali che $AB = 0$ è un sottospazio vettoriale, quindi determinarne una base e la dimensione.

   (b) Dimostrare che esiste una matrice B per cui il sottospazio descritto al punto precedente ha dimensione 6.

4. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 0 \\ 3x - y + 2z &= b \\ y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

   dove a e b sono parametri reali.

   (a) Determinare, al variare dei parametri a e b, il numero di soluzioni del sistema.

   (b) Nei casi in cui il sistema ammette più di una soluzione, determinare l'insieme delle soluzioni.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.