

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 09 Novembre 2013

1. Consideriamo i seguenti punti nello spazio

$$A = (0, 0, 1) \quad B = (0, 2, 0) \quad C = (-1, 2, 3) \quad D = (0, 1, 1).$$

- (a) Determinare il volume del tetraedro $ABCD$.
- (b) Determinare l'angolo che la faccia ABC forma con la faccia ABD .

2. Consideriamo in \mathbb{R}^3 i vettori

$$v_1 = (0, 2, 3) \quad v_2 = (-1, 0, 1) \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

- (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(v_1) = v_1 - v_2, \quad f(v_2) = v_2 - v_3, \quad f(v_3) = v_3 - v_1.$$

- (b) Scrivere la matrice associata ad f nella base canonica.
- (c) Trovare la dimensione ed una base per il \ker e l'immagine di f .

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale a 3. Consideriamo i sottospazi

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(0) = p(2) \text{ e } p(1) = 0\}, \quad W = \text{Span} \{x^2 + 1, x\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di V , W , $V + W$, $V \cap W$.

4. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{aligned} y + z &= -1 \\ 3x + 4y + 5z &= 2 \\ 6x + 7y + \lambda z &= 5 \end{aligned}$$

dove λ è un parametro reale.

- (a) Risolvere il sistema nel caso particolare $\lambda = 0$.
- (b) Determinare per quali valori di λ il sistema ammette un'unica soluzione.
- (c) Determinare cosa accade per i restanti valori di λ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.