# Prodotti scalari – Esercizi teorici 2

**Argomenti**: prodotti scalari generali **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆⋆

**Prerequisiti**: prodotti scalari, teorema spettrale

---

1. (Vettori isotropi) Sia $V$ uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Un vettore $v \in V$ di dice *isotropo* se $\langle v, v\rangle = 0$, cioè se è ortogonale a se stesso.

   (a) Dimostrare che esiste un vettore isotropo se e solo se il prodotto scalare non è né definito positivo, né definito negativo.

   (b) Dimostrare che, se il prodotto scalare è indefinito, allora esiste una base di $V$ fatta di soli vettori isotropi.

2. (Indice di Witt) Sia $V$ uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Si dice *indice di Witt* il più grande intero $k$ per cui esiste un sottospazio $W$ di $V$ di dimensione $k$ tale che il prodotto scalare è identicamente nullo su $W$, cioè $\langle w_1, w_2\rangle = 0$ per ogni $w_1$ e $w_2$ in $W$.

   Determinare l'indice di Witt di un prodotto scalare con segnatura $(n_0, n_+, n_-)$.

3. Sia $A$ una matrice simmetrica.

   (a) Dimostrare che esiste una matrice *ortogonale* $M$ tale che $M^tAM$ è diagonale (questo è banale con lo strumento giusto).

   (b) Dimostrare che esiste una matrice *invertibile* $M$ tale che $M^tAM$ è diagonale e sulla diagonale compaiono solo $0$, $+1$, $-1$ (non necessariamente devono comparire tutti). A cosa corrisponde il numero di $0$, $+1$, $-1$ che compaiono?

   (c) Supponiamo che $A$ abbia almeno un autovalore positivo ed almeno una autovalore negativo. Dimostrare che esiste una matrice *invertibile* $M$ tale che $M^tAM$ ha tutti 0 sulla diagonale (ma ovviamente può avere elementi non nulli fuori dalla diagonale).

4. (Diagonalizzazione simultanea) Siano dati due prodotti scalari definiti positivi in uno spazio vettoriale $V$ di dimensione finita.

   (a) Dimostrare che esiste una base di $V$ che è ORTOGONALE ~~ortonormale~~ rispetto ad entrambi i prodotti scalari.

   (b) Interpretare il risultato in termini di matrici simmetriche e cambi di base.

5. (Potenze di matrici simmetriche) Sia $A$ una matrice simmetrica.

   (a) Dimostrare che esiste una matrice simmetrica $B$ tale che $A = B^{2013}$.

   (b) Dimostrare che esiste una matrice simmetrica $B$ tale che $A = B^{2012}$ se e solo se non esiste nessun vettore (colonna) $v$ tale che $v^tAv + 1 = 0$.

   (c) Se $B^2 = A$, possiamo necessariamente concludere che $B$ è simmetrica?

   (d) Se $B^{2013} = A$, possiamo necessariamente concludere che $B$ è simmetrica?



SOLUZIONI?

BY GIMUSI 18/02/15

1. (Vettori isotropi) Sia $V$ uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Un vettore $v \in V$ di dice *isotropo* se $\langle v, v\rangle = 0$, cioè se è ortogonale a se stesso.

   (a) Dimostrare che esiste un vettore isotropo se e solo se il prodotto scalare non è né definito positivo, né definito negativo.

   (b) Dimostrare che, se il prodotto scalare è indefinito, allora esiste una base di $V$ fatta di soli vettori isotropi.

(a) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ = BASE ORTONORMALE AUTOVETTORI DI $B$

$$\begin{cases} v \in V = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \neq 0 \\ \langle v, v\rangle = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 \end{cases}$$

$\exists v$ S.C. $\langle v, v\rangle = 0 \iff \exists \lambda_i = 0$ OPPURE $\exists \lambda_i > 0 \ \lambda_j < 0$

(b) SIA: $n_+ = p \quad n_- = q \quad n_0 = r \qquad p+q+r = n \qquad p, q \neq 0$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ = BASE ORTONORMALE AUTOVETTORI DI $B$

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_p \quad \text{S.C.} \quad B x_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i > 0 \\ x_{p+1}, \dots, x_{p+q} \quad \text{S.C.} \quad B x_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i < 0 \end{cases}$$

PONIAMO: $\quad y_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \quad i = 1, p+q \qquad y_i^{\delta} y_i = \pm 1$

$\rightsquigarrow v = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n$

$$\langle v, v\rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2 - a_{p+1}^2 - \dots - a_{p+q}^2$$

$\rightsquigarrow$ POSSIAMO SEMPRE INDIVIDUARE "$p+q$" VETTORI ISOTROPI LIN. INDIPENDENTI DEL TIPO:

$v_1 = y_1 + y_{p+1} \quad v_2 = y_2 + y_{p+2} \quad \dots \quad v_q = y_q + y_{p+q}$

$v_{q+1} = y_{q+1} + y_{p+1} \quad v_{q+2} = v_{q+2} + y_{p+2} \quad \dots$

S.C. SPAN$\{v_1, \dots, v_q\}$ = SPAN$\{y_1, \dots, y_q\}$

$\rightsquigarrow \{v_1, \dots, v_{p+q}, x_{p+q+1}, \dots, x_n\}$ = BASE DI VETT. ISOTROPI

2. (Indice di Witt) Sia $V$ uno spazio vettoriale (di dimensione finita) su cui è definito un prodotto scalare. Si dice *indice di Witt* il più grande intero $k$ per cui esiste un sottospazio $W$ di $V$ di dimensione $k$ tale che il prodotto scalare è identicamente nullo su $W$, cioè $\langle w_1, w_2\rangle = 0$ per ogni $w_1$ e $w_2$ in $W$.

Determinare l'indice di Witt di un prodotto scalare con segnatura $(n_0, n_+, n_-)$.

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ = BASE ORTONORMALE AUTOVETTORI DI $B$

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_p \quad \text{t.c.} \quad Bx_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i > 0 \\ x_{p+1}, \dots, x_{p+q} \quad \text{t.c.} \quad Bx_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i < 0 \end{cases}$$

PONIAMO: $\quad y_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \quad i = 1, p+q \qquad y_i^T y_i = \pm 1$

SIA $m = \min\{n_+, n_-\}$

GLI $m$ VETTORI ISOTROPI DEL TIPO:

$$v_i = y_i + y_{p+i} \qquad i = 1, m$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E SODDISFANO LA CONDIZIONE

$$\langle v_i, v \rangle = 0 \quad \forall v \quad v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$$

ALLORA IL SOTTOSPAZIO $W$ AVENTE COME BASE:

$m + n_0$ VETTORI

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m, x_{p+q+1}, \dots, x_n\}$$

SODDISFA LA CONDIZIONE: $\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \quad \forall\, w_1, w_2 \in W$

$\rightsquigarrow$ INDICE DI WITT: $K = m + n_0 \qquad m = \min(n_+, n_-)$

3. Sia $A$ una matrice simmetrica.

(a) Dimostrare che esiste una matrice *ortogonale* $M$ tale che $M^t AM$ è diagonale (questo è banale con lo strumento giusto).

(b) Dimostrare che esiste una matrice *invertibile* $M$ tale che $M^t AM$ è diagonale e sulla diagonale compaiono solo $0$, $+1$, $-1$ (non necessariamente devono comparire tutti). A cosa corrisponde il numero di $0$, $+1$, $-1$ che compaiono?

(c) Supponiamo che $A$ abbia almeno un autovalore positivo ed almeno una autovalore negativo. Dimostrare che esiste una matrice *invertibile* $M$ tale che $M^t AM$ ha tutti 0 sulla diagonale (ma ovviamente può avere elementi non nulli fuori dalla diagonale).

(a) A SIMMETRICA $\rightsquigarrow$ x TEOREMA SPETTRALE AMMETTE UNA BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI $\rightsquigarrow \exists\, M$ ORTOGONALE t.c. $M^t A M = D$

(b) SIA $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ = BASE ORTONORMALE AUTOVETTORI DI $A$

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_p \quad \text{t.c. } A x_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i > 0 & p = n_+ \\ x_{p+1}, \dots, x_{p+q} \quad \text{t.c. } A x_i = \lambda_i x_i \quad \lambda_i < 0 & q = n_- \end{cases}$$

PONIAMO: $\quad y_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \quad i = 1, p+q \qquad y_i^t y_i = \pm 1$

SIA $M = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{p+q} & x_{p+q+1} & \dots & x_n \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow M^t A M = M^t \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 & \dots & \lambda_{p+q} y_{p+q} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\overset{n_+}{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\overset{n_-}{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\overset{n_0}{\begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{matrix}}} \end{pmatrix}$$

(c) $\exists\, \lambda_1 > 0\ \lambda_2 < 0 \rightsquigarrow A$ ASSOCIATA A UN PRODOTTO SCALARE INDEFINITO

$\rightsquigarrow \exists$ BASE DI VETTORI ISOTROPI $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ t.c. $\langle v_i, v_i \rangle = 0$ (Es. 1(b))

$\rightsquigarrow \exists\, M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ t.c. $M^t A M$ HA TUTTI ZERI SULLA DIAG.

4. (Diagonalizzazione simultanea) Siano dati due prodotti scalari definiti positivi in uno spazio vettoriale $V$ di dimensione finita.

(a) Dimostrare che esiste una base di $V$ che è ~~ortonormale~~ ORTOGONALE rispetto ad entrambi i prodotti scalari.

(b) Interpretare il risultato in termini di matrici simmetriche e cambi di base.

(a)
$$\begin{cases} A = A^T \quad \text{t.c.} \quad v^T A v > 0 \quad \forall v \neq 0 \\ B = B^T \quad \text{t.c.} \quad v^T B v > 0 \quad \forall v \neq 0 \end{cases}$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ AUTOVETTORI ORTONORMALI DI $A$

$$\begin{cases} \langle x_i, x_j \rangle_A = x_i^T A x_j = \delta_{ij} \lambda_i^A & A \rightsquigarrow D_A \\ \langle x_i, x_j \rangle_B = x_i^T B x_j = b_{ij} & B \rightsquigarrow \hat{B} \end{cases}$$

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ AUTOVETTORI ORTONORMALI DI $\hat{B}$

$$\begin{cases} \langle y_i, y_j \rangle_{\hat{B}} = y_i^T \hat{B} y_i = \delta_{ij} \lambda_i^{\hat{B}} & \hat{B} \rightsquigarrow D_{\hat{B}} \\ \langle y_i, y_j \rangle_{D_A} = y_i^T (\delta_{ij} \lambda_{ij}^A) y_j = \delta_{ij} \lambda_{ij}^A & D_A \rightsquigarrow D_A \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ESISTE UNA BASE ORTOGONALE PER $A$ E $B$

(b) CAMBIO DI BASE 1: $M_A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad M_A^T A M_A = D_A \qquad M_A^T B M_A = \hat{B} \qquad \hat{B} = \hat{B}^T$$

OSS: $M_A^T = M_A^{-1}$

$\hat{B}$ SIMILE A $B$

CAMBIO DI BASE 2: $M_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} M_{\hat{B}}^T D_A M_{\hat{B}} = M_{\hat{B}}^T M_A^T A M_A M_{\hat{B}} = D_A \\ M_{\hat{B}} \hat{B} M_{\hat{B}} = M_{\hat{B}}^T M_A B M_A M_{\hat{B}} = D_{\hat{B}} \; (= D_B) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ BASE ORTOGONALE $\equiv$ VETTORI COLONNA DI $M_A M_{\hat{B}}$

5. (Potenze di matrici simmetriche) Sia $A$ una matrice simmetrica.

(a) Dimostrare che esiste una matrice simmetrica $B$ tale che $A = B^{2013}$.

(b) Dimostrare che esiste una matrice simmetrica $B$ tale che $A = B^{2012}$ se e solo se non esiste nessun vettore (colonna) $v$ tale che $v^t A v + 1 = 0$.

(c) Se $B^2 = A$, possiamo necessariamente concludere che $B$ è simmetrica?

(d) Se $B^{2013} = A$, possiamo necessariamente concludere che $B$ è simmetrica?

(a) $A = A^T \rightsquigarrow$ PER TEOREMA SPETTRALE $\exists M$ ORTOGONALE

T.C. $M^T A M = D \quad D = \{\delta_{ij} \lambda_i\} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$

$\exists \hat{D}$ T.C. $\hat{D}^{2013} = D \quad \hat{\lambda}_i = (\lambda_i)^{1/2013}$

$\rightsquigarrow A = M D M^T = M \hat{D}^{2013} M^T$

SIA $B = M\hat{D}M^T = B^T = (M\hat{D}M^T)^T = M\hat{D}^T M^T = M\hat{D}M^T$

$\rightsquigarrow B^n = (M\hat{D}M^T)^n = M\hat{D}M^T \cdot M\hat{D}M^T \cdots M\hat{D}M^T = M\hat{D}^n M^T$

$\rightsquigarrow A = M\hat{D}^{2013}M^T = B^{2013}$

(b) $\exists v: v^T A v + 1 = 0 \iff v^T A v = \langle v, v\rangle = -1 \iff n_- \neq 0 \iff \exists \lambda_i < 0$

$\rightsquigarrow \nexists v : v^T A v + 1 = 0 \iff \nexists \lambda_i < 0 \rightsquigarrow \lambda_i \geq 0$

$\rightsquigarrow$ (VD. P.TO (a)) $\exists B = B^T$ T.C. $A = M\hat{D}^{2012}M^T = B^{2012}$

(c) L'ESISTENZA DI $B = B^T$ UNICA NON È ASSICURATA

AD ES. $\forall B \in M_{2\times 2}$ T.C. $\lambda_i^B = 0 \ \forall i = 1,2 \rightsquigarrow p(B) = B^2 = 0$

$\rightsquigarrow B^2 = A = 0$ CON $B$ NON NEC. SIMMETRICA

Ex $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

AD ES. MATRICI COMPLESSE

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) L'ESISTENZA DI $B = B^{\delta}$ UNICA NON È ASSICURATA

AD ES. $\forall B \in M_{n \times n}$ $n \leq 2013$ CON $\lambda_i^B = 0$ $\forall i = 1, n$ $\rightsquigarrow p(B) = B^n = 0$

$\rightsquigarrow B^{2013} = A = 0$ CON $B$ NON NEC. SIMMETRICA