Isometrie del piano 3

Argomenti: isometrie del piano **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: isometrie nel piano, matrici ortogonali

1. Esaminare le seguenti espressioni che rappresentano trasformazioni affini del piano, riconoscendo quali di esse sono omotetie (di fattore diverso da ± 1) e quali di esse sono isometrie. Per le omotetie, determinare il centro ed il fattore di omotetia. Per le isometrie, descrivere di cosa si tratta sulla base della classificazione.

$$(2x+y, y+3x+1), \qquad (2x+5, 2y-7), \qquad (-2x+5, -2y-7),$$
$$(7+x, 3+y), \qquad (7+x, 3-y), \qquad (7-x, 3+y),$$
$$(7-x, 3-y), \qquad (7+y, 3+x), \qquad (7+y, 3-x),$$
$$(7-y, 3+x), \qquad (7-y, 3-x), \qquad (7-x, 3-x),$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x+y+5, x+\sqrt{3}\,y+7\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x-y+5, x+\sqrt{3}\,y+7\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x-y+5, x-\sqrt{3}\,y+7\right), \qquad \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\,x-y+5, x+\sqrt{3}\,y+7\right),$$
$$\left(\frac{3x+4y-7}{5}, \frac{4x+3y+1}{5}\right), \qquad \left(\frac{3x-4y-7}{5}, \frac{4x-3y+1}{5}\right),$$
$$\left(\frac{-3x+4y+1}{5}, \frac{4x+3y-2}{5}\right), \qquad \left(\frac{-3x+4y-1}{5}, \frac{4x+3y+2}{5}\right).$$

2. Un rettangolo ha un vertice nel punto $(2,3)$. Gli assi dei lati sono le rette $2x-3y+5=0$ e $3x+2y+7=0$. Determinare le coordinate dei restanti vertici del rettangolo.

3. Un triangolo equilatero ha un vertice in $A=(2,1)$, un vertice in $B=(7,-1)$, ed il restante vertice C nel semipiano delimitato dalla retta AB e contenente l'origine.

   Determinare le coordinate di C.

4. Un quadrato ha due vertici *opposti* nei punti $(112,113)$ e $(14,-27)$.

   Determinare le coordinate dei restanti due vertici.

5. Un quadrato ha i vertici $ABCD$ ordinati in senso orario, con $A=(-2,3)$ e $B=(6,-3)$.

   Determinare le coordinate di C e D.

6. Un rettangolo ha i vertici $ABCD$ ordinati in senso orario, con $A=(-2,3)$ e $B=(6,-3)$. Inoltre il lato BC è il doppio del lato AB.

   Determinare le coordinate di C e D, e l'equazione della circonferenza circoscritta al rettangolo.

7. Un esagono regolare ha i vertici $ABCDEF$ ordinati in senso orario, con $A=(1,7)$ e $B=(3,1)$.

   Determinare le coordinate dei restanti vertici.

SOLUZIONI ?

BY GIMUSI 06/02/15

1. Esaminare le seguenti espressioni che rappresentano trasformazioni affini del piano, riconoscendo quali di esse sono omotetie (di fattore diverso da ± 1) e quali di esse sono isometrie. Per le omotetie, determinare il centro ed il fattore di omotetia. Per le isometrie, descrivere di cosa si tratta sulla base della classificazione.

(a) $(2x+y, y+3x+1)$, (b) $(2x+5, 2y-7)$, (c) $(-2x+5, -2y-7)$,

(d) $(7+x, 3+y)$, (e) $(7+x, 3-y)$, (f) $(7-x, 3+y)$,

(g) $(7-x, 3-y)$, (h) $(7+y, 3+x)$, (i) $(7+y, 3-x)$,

(l) $(7-y, 3+x)$, (m) $(7-y, 3-x)$, (n) $(7-x, 3-x)$,

(o) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x+y+5, x+\sqrt{3}y+7\right)$, (p) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x-y+5, x+\sqrt{3}y+7\right)$,

(q) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x-y+5, x-\sqrt{3}y+7\right)$, (r) $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x-y+5, x+\sqrt{3}y+7\right)$,

(s) $\left(\frac{3x+4y-7}{5}, \frac{4x+3y+1}{5}\right)$, (t) $\left(\frac{3x-4y-7}{5}, \frac{4x-3y+1}{5}\right)$,

(u) $\left(\frac{-3x+4y+1}{5}, \frac{4x+3y-2}{5}\right)$, (v) $\left(\frac{-3x+4y-1}{5}, \frac{4x+3y+2}{5}\right)$.

(a) $(2x+y, y+3x+1)$

$$\begin{cases} x' = 2x+y \\ y' = 3x+y+1 \end{cases} \qquad f(x) = Ax + b \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = (0,1)$$

$\equiv$ AFFINITÀ GENERICA

(b) $(2x+5, 2y-7) \equiv f(x) = Ax+b$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

P.TI FISSI: $Ax+b = x$ $(A-I)x = -b$ $x = -b$

$f(x) = A(x+b) - b$ $\equiv$ OMOTETIA CENTRO $-b$ E FATTORE 2

(c) $(-2x+5, -2y-7) \equiv f(x) = Ax+b$: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

P.TI FISSI: $Ax+b = x$ $(A-I)x = -b$ $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x = -b$ $x = \frac{1}{3} b$

$f(x) = A\left(x - \frac{1}{3}b\right) + \frac{1}{3}b$ $\equiv$ OMOTETIA CENTRO $\frac{1}{3}b$ E FATTORE -2

(d) $(7+x, 3+y) \equiv f(x) = Ax+b$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ISOMETRIA $\equiv$ TRASLAZIONE DI VETT. b

(e) $(7+x, 3-y) \equiv f(x) = Ax+b$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $A \equiv$ SIMM. RISPETTO ASSE X $(\theta = 0)$

RISPETTO ASSE X $(y=0)$ $\quad b \begin{cases} b_{\parallel} = (7,0) \\ b_{\perp} = (0,3) \end{cases}$

$$f(x) = \underbrace{Ax + b_{\perp}}_{\text{RIFLESS.}} + \underbrace{b_{\parallel}}_{\text{TRASL.}}$$

$$Ax + b_{\perp} = x \rightsquigarrow (A-I)x = -b_{\perp} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \delta \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}b_{\perp}\right) + \tfrac{1}{2}b_{\perp} + b_{\parallel}$$ $\equiv$ SIMMETRIA RISPETTO A RETTA $y = 3/2$ ⊕ TRASL. $\parallel$ DI VETTORE $b_{\parallel}$

(f) $(7-x, 3+y) \equiv f(x) = Ax + b \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{\delta} = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\quad A \equiv$ SIMM. RISPETTO ASSE Y $(\theta = \pi)$

RISPETTO ASSE Y $(x=0)$ $\quad b \begin{cases} b_{\perp} = (7,0) \\ b_{\parallel} = (0,3) \end{cases}$

$$f(x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}b_{\perp}\right) + \tfrac{1}{2}b_{\perp} + b_{\parallel}$$ $\equiv$ SIMMETRIA RISPETTO A RETTA $x = 3/2$ ⊕ TRASL. $\parallel$ DI VETTORE $b_{\parallel}$

(g) $(7-x, 3-y) \equiv f(x) = Ax + b \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$AA^{\delta} = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\quad A \equiv$ ROTAZIONE $\theta = \pi$ RISPETTO ORIGINE

P.TO FISSO: $Ax + b = x \quad (A-I)x = -b \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$$f(x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}b\right) + \tfrac{1}{2}b$$ $\equiv$ ROTAZIONE $\theta = \pi$ CON CENTRO IN $\frac{b}{2}$

(h) $(7+y, 3+x) \equiv f(x) = Ax + b \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$AA^{\delta} = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\quad A \equiv$ SIMM. RISPETTO RETTA $y = x$ $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

RISPETTO $y = x$ $\quad b \begin{cases} b_{\perp} = (\delta, -\delta) \\ b_{\parallel} = (s, s) \end{cases} \quad \begin{cases} \delta + s = 7 \\ -\delta + s = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta = 2 \\ s = 5 \end{cases}$

$$f(x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}b_{\perp}\right) + \tfrac{1}{2}b_{\perp} + b_{\parallel}$$ $\equiv$ SIMM. RISPETTO A RETTA $y = x - 2$ ⊕ TRASLAZIONE DI VETTORE $(5,5)$

(i) $(7+y,\ 3-x) \equiv f(x) = Ax + b \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$AA^t = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\qquad A \equiv$ ROTAZIONE ORARIA $\theta = \pi/2$

P.TO FISSO: $Ax + b = x \quad (A-I)x = -b \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f(x) = A(x-c) + c \equiv$ ROTAZIONE ORARIA $\theta = \pi/2$ CON CENTRO IN c

(l) $(7-y,\ 3+x) \equiv f(x) = Ax + b \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$AA^t = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\qquad A \equiv$ ROTAZ. ANTIORARIA $\theta = \pi/2$

P.TO FISSO $\quad Ax + b = x \quad (A-I)x = -b \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$f(x) = A(x-c) + c \equiv$ ROTAZ. ANTIORARIA $\theta = \pi/2$ CON CENTRO IN c

(m) $(7-y,\ 3-x) \equiv f(x) = Ax + b \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$AA^t = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\qquad A \equiv$ SIMM. RISPETTO A RETTA $y = -x \ \left(\theta = \frac{3}{2}\pi\right)$

RISPETTO A $y = -x \quad b \begin{cases} b_\perp = (t, t) \\ b_\parallel = (s, -s) \end{cases} \quad \begin{cases} t + s = 7 \\ t - s = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 5 \\ s = 2 \end{cases}$

$f(x) = A\left(x - \frac{1}{2} b_\perp\right) + \frac{1}{2} b_\perp + b_\parallel \equiv$ SIMM. RISPETTO A RETTA $y = -x + 5$ $\oplus$ TRASLAZIONE DI VETTORE $(2, -2)$

(n) $(7-x,\ 3-x) \equiv f(x) = Ax + b \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\equiv$ AFFINITÀ GENERICA

(a) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y+5,\ x+\sqrt{3}y+7) \equiv f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}5/2\\ 7/2\end{pmatrix}$

$$AA^{\delta}=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ ≡ AFFINITÀ GENERICA

(b) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y+5,\ x+\sqrt{3}y+7) \equiv f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}5/2\\ 7/2\end{pmatrix}$

$$AA^{\delta}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ ISOMETRIA

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad \theta=\pi/6$$ ≡ ROTAZ. ANTIORARIA DI $\pi/6$

P.TO FISSO $\quad Ax+b=x \quad (A-I)x=-b \quad \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2-1 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-5/2\\ -7/2\end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \mathrm{DET}(A-I)=(\sqrt{3}/2-1)^2+1/4=3/4+1-\sqrt{3}+1/4=2-\sqrt{3}$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & 1/2\\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2 & 1\\ -1 & \sqrt{3}-2\end{pmatrix}$$

$$c=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\sqrt{3}+5-\frac{7}{2}\\ \frac{5}{2}-\frac{7}{2}\sqrt{3}+7\end{pmatrix}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix}-5\sqrt{3}+3\\ -7\sqrt{3}+19\end{pmatrix}$$

$f(x)=A(x-c)+c$ ≡ ROTAZ. ANTIORARIA $\theta=\pi/6$ CON CENTRO IN C

(c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-y+5,\ x-\sqrt{3}y+7) \equiv f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & -\sqrt{3}/2\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}5/2\\ 7/2\end{pmatrix}$

$$AA^{\delta}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & -\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & -\sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1\end{pmatrix}$$ ≡ AFFINITÀ GENERICA

(d) $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}x-y+5,\ x+\sqrt{3}y+7) \equiv f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}5/2\\ 7/2\end{pmatrix}$

$$AA^{\delta}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1\end{pmatrix}$$ ≡ AFFINITÀ GENERICA

(S) $\left(\frac{3x+4y-7}{5}, \frac{4x+3y+1}{5}\right) = f(x) = Ax+b \qquad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix} \qquad b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7\\ 1\end{pmatrix}$

$$AA^{\delta} = \begin{pmatrix}1 & 24/25\\ 24/25 & 1\end{pmatrix}$$ ≡ AFFINITÀ GENERICA

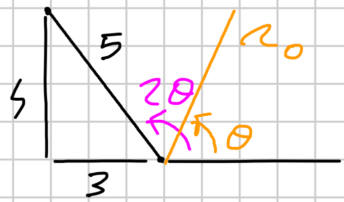
(δ) $\left(\frac{3x-4y-7}{5}, \frac{4x-3y+1}{5}\right) = f(x) = Ax+b \qquad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & -3\end{pmatrix} \qquad b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7\\ 1\end{pmatrix}$

$$AA^{\delta} = \begin{pmatrix}-7/25 & 0\\ 0 & -7/25\end{pmatrix} = -\frac{7}{25} I$$ ≡ AFFINITÀ GENERICA

(μ) $\left(\frac{-3x+4y+1}{5}, \frac{4x+3y-2}{5}\right) = f(x) = Ax+b \qquad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix} \qquad b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

$$AA^{\delta} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ ≡ ISOMETRIA A ≡ SIMMETRIA RISPETTO AD UNA RETTA CHE FORMA ANGOLO θ CON ASSE X

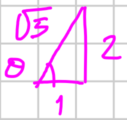
RETTA r_0 -> PUNTI FISSI DI Ax



$$Ax = x \qquad (A-I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix}-3/5-1 & 4/5\\ 4/5 & 3/5-1\end{pmatrix}x = 0 \qquad \begin{pmatrix}-8 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}x = 0 \qquad x = \delta\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow r_0: \; y = 2x$

VER. 

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin\theta = \frac{2}{\sqrt5} \qquad \begin{cases}\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2}{5} - 1 = \frac{-3}{5}\\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 4/5\end{cases}$

RISPETTO A r_0 b $\begin{cases} b_{\parallel} = (\delta, 2\delta)\\ b_{\perp} = (-2s, s)\end{cases} \begin{cases}\delta - 2s = 1/5\\ 2\delta + s = -2/5\end{cases} \begin{cases} s = -4/25\\ 5\delta = -3/5 \quad \delta = -3/25\end{cases}$

$$b_{\parallel} = \left(-\frac{3}{25}, \frac{-6}{25}\right) \qquad b_{\perp} = \left(\frac{8}{25}, \frac{-4}{25}\right)$$

$r \parallel r_0 \quad y + \frac{4}{50} = 2\left(x - \frac{8}{50}\right) \qquad y = 2x - \frac{20}{50} \qquad y = 2x - \frac{2}{5}$

$f(x) = A\left(x - \frac{1}{2}b_{\perp}\right) + \frac{1}{2}b_{\perp} + b_{\parallel}$ ≡ SIMM. RISPETTO A RETTA $y = 2x - 2/5$ ⊕ TRASLAZIONE DI VETTORE $(-3/25, -6/25)$

(v) $\left(\frac{-3x+4y-1}{5}, \frac{4x+3y+2}{5}\right) \equiv f(x) = Ax + b \quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$AA^T = I \qquad A \equiv$ SIMM. RISPETTO A RETTA $r_0: y = 2x$

RISPETTO A r_0 $\quad b \begin{cases} b_{/\!/} = (t, 2t) \\ b_\perp = (-2s, s) \end{cases} \begin{cases} t - 2s = -1/5 \\ 2t + s = 2/5 \end{cases} \begin{cases} s = 4/25 \\ 5t = 3/5 \quad t = 3/25 \end{cases}$

$b_{/\!/} = (3/25, 6/25) \qquad b_\perp = (-8/25, 4/25)$

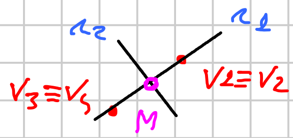
$r /\!/ r_0 \quad y - \frac{4}{50} = 2\left(x + \frac{8}{50}\right) \quad y = 2x + \frac{20}{50} \quad y = 2x + \frac{4}{5}$

$f(x) = A\left(x - \frac{1}{2} b_\perp\right) + \frac{1}{2} b_\perp + b_{/\!/} \equiv$ SIMM. RISPETTO A RETTA $y = 2x + 2/5$ $\oplus$ TRASLAZIONE DI VETTORE $(3/25, 6/25)$

2. Un rettangolo ha un vertice nel punto $(2, 3)$. Gli assi dei lati sono le rette $2x - 3y + 5 = 0$ e $3x + 2y + 7 = 0$. Determinare le coordinate dei restanti vertici del rettangolo.

$r_1: 2x - 3y + 5 = 0 \qquad r_2: 3x + 2y + 7 = 0 \qquad r_1 \perp r_2$

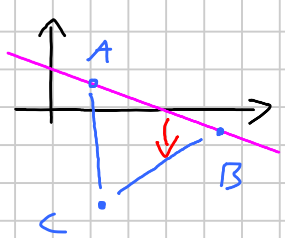
$M: r_1 \cap r_2 \begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \begin{cases} 13x + 31 = 0 & x = -31/13 \\ 2y = -7 + \frac{93}{13} = \frac{2}{13} & y = 1/13 \end{cases}$



$\begin{cases} V_1 = (2, 3) \in 2x - 3y + 5 \qquad V_2 = V_1 \\ V_3: \frac{V_1 + V_3}{2} = M \quad V_3 = 2M - V_1 = \left(-\frac{62}{13} - 2, \frac{2}{13} - 3\right) = \left(-\frac{88}{13}, -\frac{37}{13}\right) \quad V_4 = V_3 \end{cases}$

3. Un triangolo equilatero ha un vertice in $A = (2, 1)$, un vertice in $B = (7, -1)$, ed il restante vertice C nel semipiano delimitato dalla retta AB e contenente l'origine. Determinare le coordinate di C.

$r_{AB}: (2, 1) + t(5, -2) \quad y - 1 = -\frac{2}{5}(x - 2) \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$

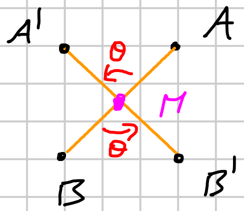


$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \overset{\theta = 60°}{=} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \equiv$ ROTAZ. ANTIOR. DI $\theta = 60°$

$$C = S(A-B)+B = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{5}{2} - \sqrt{3} + 7, -\frac{5}{2}\sqrt{3} + 1 - 1\right) \qquad C = \left(\frac{9}{2} - \sqrt{3}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$$

4. Un quadrato ha due vertici *opposti* nei punti $\overset{A}{(112, 113)}$ e $\overset{B}{(14, -27)}$. Determinare le coordinate dei restanti due vertici.



$$\begin{cases} A = (112, 113) \qquad B = (14, -27) \\ M = \dfrac{A+B}{2} = (63, 43) \end{cases}$$

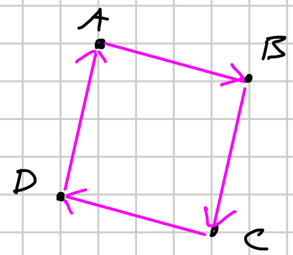
ROTAZ. ANTIORARIA DI $90° = \pi/2$: $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A' = S(A-M)+M = S\begin{pmatrix} 49 \\ 70 \end{pmatrix} + M = (-70+63, 49+43) = (-7, 92)$$

$$B' = S(B-M)+M = S\begin{pmatrix} -49 \\ -70 \end{pmatrix} + M = (70+63, -49+43) = (133, -6)$$

5. Un quadrato ha i vertici $ABCD$ ordinati in senso orario, con $A = (-2, 3)$ e $B = (6, -3)$. Determinare le coordinate di C e D.

$B - A = (8, -6)$ ROT. ORARIA DI $\frac{\pi}{2}$: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



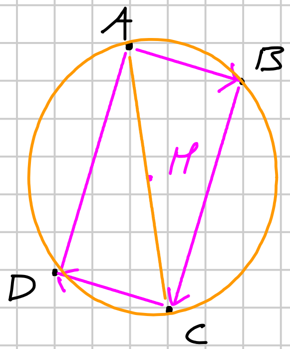
$$\begin{cases} C = S(B-A) + B = (-6+6, -8-3) = (0, -11) \\ D = C + (A-B) = (0-8, -11+6) = (-8, -5) \end{cases}$$

VER. $A - D = (-2+8, 3+5) = (6, 8) = B - C = (6, -3+11) = (6, 8)$

6. Un rettangolo ha i vertici $ABCD$ ordinati in senso orario, con $A = (-2, 3)$ e $B = (6, -3)$. Inoltre il lato BC è il doppio del lato AB.

   Determinare le coordinate di C e D, e l'equazione della circonferenza circoscritta al rettangolo.

$B-A=(8,-6)$ ROT. ORARIA DI $\frac{\pi}{2}$: $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



$$\begin{cases} C = 2\cdot S(B-A)+B = (-12+6, -16-3) = (-6,-19) \\ D = C+(A-B) = (-6-8, -19+6) = (-15,-13) \end{cases}$$

$$M = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{-2-6}{2}, \frac{3-19}{2}\right) = (-5,-8)$$

$$R^2 = \|A-M\|^2 = \|(2,11)\|^2 = 5+121 = 125 \qquad R = 5\sqrt{5}$$

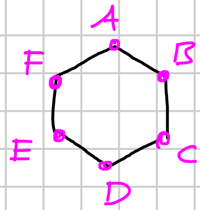
$$(x+5)^2+(y+8)^2 = 125 \qquad x^2+y^2+8x+16y-55=0$$

7. Un esagono regolare ha i vertici $ABCDEF$ ordinati in senso orario, con $A = (1, 7)$ e $B = (3, 1)$.

   Determinare le coordinate dei restanti vertici.

$B-A=(2,-6)$ ROT. ORARIA DI $60° = \pi/3$: $S=\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$C = S(B-A)+B = \overset{C-B}{\left(1-3\sqrt{3}, -3-\sqrt{3}\right)} + (3,1) = (5-3\sqrt{3}, -2-\sqrt{3})$$



$$D = S^2(B-A)+C = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+C =$$

$$= \overset{D-C}{\left(-1-3\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}\right)} + C = (3-6\sqrt{3}, 1-2\sqrt{3})$$

$$E = D+(A-B) = (3-6\sqrt{3}-2, 1-2\sqrt{3}+6) = (1-6\sqrt{3}, 7-2\sqrt{3})$$

$$F = E+(B-C) = (1-6\sqrt{3}-2+3\sqrt{3}, 7-2\sqrt{3}+3+\sqrt{3}) = (-3\sqrt{3}, 10-\sqrt{3})$$

VER. $A = F+(C-D) = (-3\sqrt{3}+1+3\sqrt{3}, 10-\sqrt{3}-3+\sqrt{3}) = (1,7)$