Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 31 Dicembre 2013

1. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i punti $A = (2, -1, 2)$ e $B = (2, 3, 0)$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene A e B e non interseca la retta passante per l'origine e per $(1, 1, 1)$.

   (b) Siano C e D punti appartenenti al piano precedente e tali che $ABCD$ sia un quadrato. Determinare le possibili coordinate di C e D.

2. Sia r la retta del piano che passa per $A = (-1, 3)$ e per $B = (3, 4)$.

   (a) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r' che passa per B, ha coefficiente angolare positivo, e forma con r un angolo θ tale che $\cos(\theta) = 3/5$.

   (b) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r'', simmetrica di r rispetto ad r'.

   (c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad r' e poi la simmetria centrale rispetto ad A.

3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che la matrice A è simile alla matrice B.

   (b) Nei casi in cui A è simile a B, determinare una matrice invertibile M che realizza la similitudine.

4. Sia $V = \operatorname{Span}\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$ lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari delle cinque funzioni indicate.

   (a) Dimostrare che la funzione $\sin^2 x$ appartiene a V.

   (b) Dimostrare che la formula

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$$

   rappresenta un prodotto scalare definito positivo in V, e determinare quindi una base ortonormale rispetto a tale prodotto.

   (c) Dimostrare che la formula $f(x) \to f'(x)$ definisce un'applicazione lineare da V in V, e determinare gli autovalori (eventualmente complessi) di tale applicazione lineare.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

SOLUZIONI
BY GIMUSI 02/02/15

1. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i punti $A = (2, -1, 2)$ e $B = (2, 3, 0)$.

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene A e B e non interseca la retta passante per l'origine e per $(1, 1, 1)$.

   (b) Siano C e D punti appartenenti al piano precedente e tali che $ABCD$ sia un quadrato. Determinare le possibili coordinate di C e D.

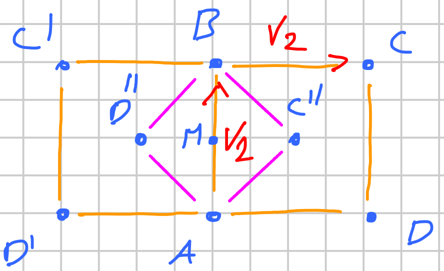
(a)
$$\begin{cases} r_{AB}: \; A + \delta(B-A) = (2,-1,2) + \sigma(0,\overset{V_1}{4},-2) \\ r_0: \; \sigma(1,\overset{V_0}{1},1) \end{cases}$$

$$n \perp V_1, V_0: \; n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6,-2,-4) \equiv (3,-1,-2)$$

PIANO π: $3x - y - 2z + d = 0$ $\quad B \in \pi \leadsto 6 - 3 + d = 0 \quad d = -3$

$\leadsto 3x - y - 2z - 3 = 0$

(b)



$\|B-A\| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$$\begin{cases} V_1 = (0,4,-2) \\ V \in \pi: (\delta, 3\delta - 2s, s) \end{cases}$$

$\langle V, V_1 \rangle = 0 \quad 12\delta - 8s - 2s = 0 \quad s = \frac{6}{5}\delta \quad V = (\delta, \frac{3}{5}\delta, \frac{6}{5}\delta)$

$\|V\| = \delta\sqrt{1 + 9/25 + 36/25} = \frac{\delta}{5}\sqrt{70} = 2\sqrt{5} \leadsto \delta = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{70}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}$

$\leadsto V_2 = \left(\frac{5}{7}\sqrt{14}, \frac{3}{7}\sqrt{14}, \frac{6}{7}\sqrt{14}\right)$

$C, C' = B \pm V_2 = \left(2 \pm \frac{5}{7}\sqrt{14}, 3 \pm \frac{3}{7}\sqrt{14}, \pm\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)$

$D, D' = A \pm V_2 = \left(2 \pm \frac{5}{7}\sqrt{14}, -1 \pm \frac{3}{7}\sqrt{14}, 2 \pm \frac{6}{7}\sqrt{14}\right)$

$M = \frac{A+B}{2} = (2,1,1) \quad (= A + V_1/2)$

$C'', D'' = M \pm V_2/2 = \left(2 \pm \frac{5}{14}\sqrt{14}, 1 \pm \frac{3}{14}\sqrt{14}, 1 \pm \frac{3}{7}\sqrt{14}\right)$

2. Sia r la retta del piano che passa per $A=(-1,3)$ e per $B=(3,4)$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r' che passa per B, ha coefficiente angolare positivo, e forma con r un angolo θ tale che $\cos(\theta)=3/5$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r'', simmetrica di r rispetto ad r'.

(c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad r' e poi la simmetria centrale rispetto ad A.

(a) $r: \quad A+\delta(B-A) \qquad (-1,3)+\delta(\overset{v}{4,1})$

ROTAZIONE ANTIORARIA DI θ : $P'=SP \qquad S=\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

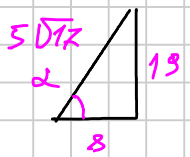
$v'=Sv=\left(12/5-4/5,\ 16/5+3/5\right)=\left(8/5,\ 19/5\right)\equiv(8,19) \qquad m=\frac{19}{8}>0$

$r': \quad y-4=(x-3)\frac{19}{8} \qquad y=\frac{19}{8}x-\frac{57}{8}+4 \qquad y=\frac{19}{8}x-\frac{25}{8}$

(b) $v''=Sv'=\left(24/5-76/5,\ 32/5+57/5\right)=\left(-52/5,\ 89/5\right)\equiv(-52,89)$

$r'': \quad y-4=(x-3)\frac{-89}{52} \qquad y=-\frac{89}{52}x+\frac{267}{52}+4 \qquad y=\frac{-89}{52}x+\frac{475}{52}$

(c) SIMMETRIA RISPETTO r': $\quad P'=S'(P-B)+B \qquad S'=\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$



$\cos\alpha=\frac{8}{5\sqrt{17}} \qquad \sin\alpha=\frac{19}{5\sqrt{17}}$

$\begin{cases} \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{128}{25\cdot 17}-1=\frac{-297}{425} \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{304}{425} \end{cases}$

SIMMETRIA CENTR. A : $\quad \frac{P''+P'}{2}=A \ \rightsquigarrow\ P''=2A-P'$

COMPOSIZIONE: $\quad P''=2A-S'(P-B)-B=-S'(P-B)-B+2A$

$S''=-S'=\begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\pi+2\alpha) & \sin(\pi+2\alpha) \\ \sin(\pi+2\alpha) & -\cos(\pi+2\alpha) \end{pmatrix}$ ≡ SIMM. RISPETTO A RETTA r^* CHE FORMA ANGOLO $\frac{\pi}{2}+\alpha$

$P''=\overbrace{S''(P-B)+B}^{\text{SIMM. } r^*}+\overbrace{2(A-B)}^{w}$ ≡ SIMM. RISPETTO A RETTA r^* PASS. PER B E TRASLAZIONE DI VETTORE $w=2(A-B)$

$r^*: \ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha = \frac{8}{5\sqrt{17}}$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha = \frac{-19}{5\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{8}{19}$ $\qquad r^* = y-4 = (x-3)\,\frac{-8}{19} \qquad y = -\frac{8}{19}x + \frac{24}{19} + 4$

$y = \frac{-8}{19}x + \frac{100}{19} \equiv (3,4) + \sigma\underbrace{(19,-8)}_{v^*}$

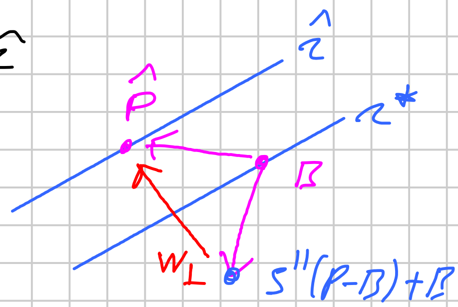
RISPETTO A r^*: $w = (-8,-2) = \begin{cases} w_\perp & \text{A } r^* \\ w_\parallel & \text{A } r^* \end{cases}$

$\|v^*\| = \sqrt{361+64} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$

$$\begin{cases} w_\parallel = \dfrac{\langle w, v^*\rangle}{\|v^*\|^2}\, v^* = \dfrac{(-152+16)}{425}(19,-8) = -\dfrac{136}{425}(19,-8) = \left(-\dfrac{152}{25}, \dfrac{64}{25}\right) \\[2ex] w_\perp = (-8,-2) - w_\parallel = \left(-\dfrac{48}{25}, \dfrac{-114}{25}\right) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow P'' = S''(P-B) + B + w_\perp + w_\parallel$

$$\begin{cases} S''(P-B) + B + w_\perp \equiv \text{RIFLESSIONE RISPETTO A } \hat{r} \parallel r^* \\ \text{INFATTI SIA } P^* \in r^*,\ \hat{r} = P^* + w_\perp/2,\ \hat{P} \in \hat{r} \\ S''(\hat{P} - B) + B + w_\perp = \hat{P} \end{cases}$$



$\rightsquigarrow P'' = S''(P - \hat{B}) + \hat{B} + w_\parallel$

$\equiv$ SIMM. RISPETTO ALLA RETTA $\hat{r}$

$\oplus$ TRASLAZIONE $\parallel \hat{r}$ DI VETTORE $w_\parallel$

3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c si ha che la matrice A è simile alla matrice B.

(b) Nei casi in cui A è simile a B, determinare una matrice invertibile M che realizza la similitudine.

(a) MATRICI SIMILI HANNO STESSA TRACCIA, DET., AUTOVALORI:

$TR(B) = 6 = TR(A) = 6 + c \rightsquigarrow c = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \qquad DET(A) = a(12-15) - b(6-12) = -3a + 6b$$

$DET(A) = DET(B) = 6 \rightsquigarrow -a + 2b = 2 \qquad a = 2b - 2$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = \cancel{+12a} + 12b \cancel{-12a} + 8 = 0$$

$b = -2/3 \qquad a = -10/3$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ a & b & -2 \end{vmatrix} = 6 + 12a + 12b - 9a + 6b + 16 = 0$$

$3a + 18b + 22 = 0$

VER. $-10 - 12 + 22 = 0$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ a & b & -3 \end{vmatrix} = 12 + 12a + 12b - 6a + 12b + 24 = 0$$

$6a + 24b + 36 = 0$

VER. $-20 - 16 + 36 = 0$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) AUTOVALORI: $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$

$$\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow (A - I)X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \\ -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \rightsquigarrow (A - 2I)X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 18 \\ -10 & -2 & -6 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 18 \\ 0 & -22 & -36 \end{pmatrix} X = 0 \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \rightsquigarrow (A - 3I)X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 12 \\ -10 & -2 & -8 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -12 & -24 \end{pmatrix} X = 0 \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1/2 \\ 3 & 18 & 2 \\ -2 & -11 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = M^{-1} A M$$

4. Sia $V = \text{Span}\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x)\}$ lo spazio vettoriale delle combinazioni lineari delle cinque funzioni indicate.

(a) Dimostrare che la funzione $\sin^2 x$ appartiene a V.

(b) Dimostrare che la formula

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

rappresenta un prodotto scalare definito positivo in V, e determinare quindi una base ortonormale rispetto a tale prodotto.

(c) Dimostrare che la formula $f(x) \to f'(x)$ definisce un'applicazione lineare da V in V, e determinare gli autovalori (eventualmente complessi) di tale applicazione lineare.

(a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\rightsquigarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

(b) $< f(x), g(x) > = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$

$< 1, 1 > = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \qquad < 1, \sin x > \int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0 \qquad < 1, \cos x > = 0$

$< 1, \sin 2x > = \int_0^{2\pi} \sin 2x\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi} = 0 \qquad < 1, \cos 2x > = 0$

$< \sin x, \sin x > = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \pi$

$< \sin x, \cos x > = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2x\, dx = 0$

$< \sin x, \sin 2x > = \int_0^{2\pi} 2\sin^2 x \cos x\, dx = \left[\frac{2}{3}\sin^3 x\right]_0^{2\pi} = 0$

$< \sin x, \cos 2x > = \int_0^{2\pi} \sin x (2\cos^2 x - 1)\, dx = \int_0^{2\pi} 2\cos^2 x \sin x\, dx - \int_0^{2\pi} \sin x\, dx =$

$= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 x\right]_0^{2\pi} - 0 = 0$

$< \cos x, \cos x > = \pi \qquad < \cos x, \sin 2x > = \int_0^{2\pi} 2\sin x \cos^2 x\, dx = 0$

$$\langle \cos x, \cos 2x\rangle = \int_0^{2\pi} \cos x (1-2\sin^2 x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos x\,dx - \int_0^{2\pi} 2\sin^2 x \cos x\,dx = 0$$

$$\langle \sin 2x, \sin 2x\rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2 2x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx = \pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 4x\,dx = \pi$$

$$\langle \sin 2x, \cos 2x\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 4x\,dx = 0 \qquad \langle \cos 2x, \cos 2x\rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2 2x\,dx = \pi$$

$$\rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \qquad n_+ = 5 \quad n_- = 0 \quad n_0 = 0$$

$\rightsquigarrow$ DEF. POSITIVA

BASE ORTONORMALE: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \right\}$

(c) $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$

$$\begin{cases} 1 \rightsquigarrow 0 \\ \sin x \rightsquigarrow \cos x \\ \cos x \rightsquigarrow -\sin x \\ \sin 2x \rightsquigarrow 2\cos 2x \\ \cos 2x \rightsquigarrow -2\sin 2x \end{cases} \rightsquigarrow \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

= MATRICE ASSOCIATA NELLA BASE $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda^3 - \lambda)(\lambda^2 + 4)$$

$\rightsquigarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \pm i \quad \lambda_{4,5} = \pm 2i$