Applicazioni lineari 5

Argomenti: applicazioni lineari **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: tutto su applicazioni lineari, sottospazi, basi

---

1. Consideriamo l'applicazione lineare $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definita da
$$f(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A.$$
   (a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}$.
   (b) Determinare la dimensione ed una base del ker e dell'immagine di f.
   (c) Determinare la dimensione dell'intersezione tra il ker e l'immagine di f.
   (d) Determinare la dimensione ed una base del ker e dell'immagine di $f\circ f$ e $f\circ f\circ f$.

2. Consideriamo l'applicazione lineare $f_\lambda : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definita da
$$f_\lambda(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix},$$
dove λ è un parametro reale.
   (a) Scrivere la matrice associata ad f_λ rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}$.
   (b) Dimostrare che esiste un unico valore di λ per cui $\dim(\ker(f_\lambda)) > 0$. Per tale valore di λ determinare la dimensione ed una base di ker ed immagine di f_λ.

3. Consideriamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c, d si ha che $(1,1,1,1) \in \ker(f)$.
   (b) Sia $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0,\ x-2w=0\}$.
   Determinare per quali valori dei parametri si ha che $f(v) \in V$ per ogni $v \in V$.
   (c) Sia $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3z+4w=0,\}$.
   Determinare per quali valori dei parametri si ha che $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$.

4. Consideriamo lo spazio vettoriale $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=z+w=0\}$.
   (a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : W \to W$ che verifica le seguenti condizioni:
      - $f(1,-1,1,-1) = (1,-1,-1,1)$,
      - $f(f(w)) = 0$ per ogni $w \in W$.
   (b) Determinare $f(-1,1,0,0)$.
   (c) Determinare l'insieme di tutti i vettori $w \in W$ tali che $f(w) = (1,-1,-1,1)$.

SOLUZIONI ?

BY GIMUSI 02/02/15 REV01

1. Consideriamo l'applicazione lineare $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definita da

$$f(A) = A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A.$$

(a) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}$.

(b) Determinare la dimensione ed una base del ker e dell'immagine di f.

(c) Determinare la dimensione dell'intersezione tra il ker e l'immagine di f.

(d) Determinare la dimensione ed una base del ker e dell'immagine di $f\circ f$ e $f\circ f\circ f$.

(a) $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c+3d & 2c+4d\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}$

$$f(A) = \begin{pmatrix}3b-2c & 2a+3b-2d\\ -3a-3c+3d & -3b+2c\end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix}0 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ -3 & 0 & -3 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ -3 & 0 & -3 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 6 & -2 & -2\\ 0 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 9 & -6 & 0\\ 0 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$Bx = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+2c = c+d \quad a = -c+d \\ 3b = 2c \end{cases} \qquad x = t\underbrace{(1,0,0,1)}_{A=I} + s\underbrace{(3,-2,-3,0)}_{A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}}$$

VERIFICA $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -2\\ -3 & -6\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -2\\ -3 & -6\end{pmatrix}$

OSS. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix} \in KER f$

$\Rightarrow$ DIM Im $=2$ BASE: $\left\{ \overset{A_1}{\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}}, \overset{A_2}{\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}} \right\}$

DIM KER $=2$ BASE: $\left\{ \overset{A_3}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}, \overset{A_4}{\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}} \right\}$

(c)

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\quad\quad\quad}^{IM} & \overbrace{\quad\quad\quad}^{KER} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 3 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ -3 & 0 & 0 & -3\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 6 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -1 & -3\\ 0 & 9 & 0 & -12\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 6 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -3 & -21\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(Im(f) \cap Ker(f)) = 0$

(d) $f \circ f \rightsquigarrow BB = B^2$ ≡ MATRICE ASSOCIATA A $f \circ f$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 & -12 \\ 6 & 21 & -8 & -6 \\ 9 & -18 & 21 & -9 \\ -12 & -9 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(BB)v = 0 \Rightarrow B(Bv) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Bv = 0 & v \in KER \\ Bv = w & w \in KER \end{cases}$$

$\rightarrow$ IMPOSSIBILE $w \neq 0$ $Im \cap KER = 0$

$\Rightarrow KER(f \circ f) = KER(f)$ DIM$(KER\, f \circ f) = 2$ BASE = BASE$(KER\, f)$

$\Rightarrow$ DIM $Im(f \circ f) = 4 - DIM(KER\, f \circ f) = 2$

$f(A) \in Im \Rightarrow f(A) = a A_1 + b A_2$, A_1 e A_2 ≡ BASE DI Im $a, b \in \mathbb{R}$

$f(f(A)) = f(aA_1 + bA_2) = a f(A_1) + b f(A_2)$ $\forall A \in M_{2\times 2}$

$\Rightarrow$ BASE$(f \circ f)$: $\{ f(A_1), f(A_2) \}$

$f \circ f \circ f \rightsquigarrow BB^2 = B^3$ ≡ MATRICE ASSOCIATA A $f \circ f \circ f$

$\Rightarrow$ DIM $KER(f \circ f \circ f) = 2$ BASE = BASE$(KER\, f)$

$\Rightarrow$ DIM $Im(f \circ f \circ f) = 2$ BASE : $\{ f(f(A_1)), f(f(A_2)) \}$

2. Consideriamo l'applicazione lineare $f_\lambda : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definita da

$$f_\lambda(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix},$$

dove λ è un parametro reale.

(a) Scrivere la matrice associata ad f_λ rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}$.

(b) Dimostrare che esiste un unico valore di λ per cui $\dim(\ker(f_\lambda)) > 0$. Per tale valore di λ determinare la dimensione ed una base di ker ed immagine di f_λ.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad f_\lambda(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+\lambda b \\ c+3d & 2c+\lambda d \end{pmatrix}$$

MATRICE ASS. A f

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-6 \end{pmatrix} \Rightarrow DET(B) = (\lambda-6)^2$$

$$DET(B) = 0 \iff \lambda = 6$$

$$\lambda = 6 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Bx = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3b \\ c = -3d \end{cases} \qquad x = t(-3, 1, 0, 0) + s(0, 0, -3, 1)$$

$$DIM\ Im(f_{\lambda=6}) = 2 \qquad BASE: \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$DIM\ KER(f_{\lambda=6}) = 2 \qquad BASE: \left\{ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Consideriamo l'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & b & 1 & 1\\ 1 & 1 & c & 1\\ 1 & 1 & 1 & d\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri a, b, c, d si ha che $(1,1,1,1)\in\ker(f)$.

(b) Sia $V=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z=0,\ x-2w=0\}$.
Determinare per quali valori dei parametri si ha che $f(v)\in V$ per ogni $v\in V$.

(c) Sia $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y+3z+4w=0,\}$.
Determinare per quali valori dei parametri si ha che $\mathrm{Im}(f)\subseteq W$.

(a)

$$(1,1,1,1)\in KER(f) \Rightarrow \begin{cases} a+3=0\\ b+3=0\\ c+3=0\\ d+3=0\end{cases} \Rightarrow a=b=c=d=-3$$

(b)

$$V:\begin{cases} x+y+z=0\\ x-2w=0\end{cases} \Rightarrow \text{BASE DI } V: \{(\overset{v_1}{+2,-2},0,1),\ (0,\overset{v_2}{1},-1,0)\}$$

$$\forall v\in V \quad v=\alpha v_1+\beta v_2 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \qquad f(v)=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)$$

$$f(v)\in V \iff f(v_1)\in V \text{ E } f(v_2)\in V$$

$$f(v_1)=\begin{pmatrix}2a-1\\-2b+3\\1\\d\end{pmatrix},\ f(v_2)=\begin{pmatrix}0\\b-1\\1-c\\0\end{pmatrix}\in V \Rightarrow \begin{cases} 2a-\cancel{1}-2b+3+\cancel{1}=0\\ 2a-1-2d=0\\ b-\cancel{1}+\cancel{1}-c=0\\ 0=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b=c\\ a=b-3/2\\ d=a-1/2\end{cases} \qquad \begin{cases} c=\sigma \quad b=\sigma\\ a=\sigma-3/2\\ d=\sigma-2\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/2\\0\\0\\-2\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

VERIFICA

$$\begin{pmatrix}-3/2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+2\\-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-3/2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}+\sigma & 1 & 1 & 1\\ 1 & \sigma & 1 & 1\\ 1 & 1 & \sigma & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2+\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sigma-5\\-2\sigma+3\\1\\-2+\sigma\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-3/2+\sigma & 1 & 1 & 1\\ 1 & \sigma & 1 & 1\\ 1 & 1 & \sigma & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2+\sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\sigma+1\\\sigma-1\\0\end{pmatrix}$$

(c)
$$Im(f) = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta + \gamma + \delta \\ \alpha + \beta b + \gamma + \delta \\ \alpha + \beta + \gamma c + \delta \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta d \end{pmatrix} \subseteq W \Rightarrow \alpha(a+9) + \beta(2b+8) + \gamma(3c+7) + \delta(5d+6) = 0$$
$$\forall \alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a = -9,\ b = -4,\ c = -7/3,\ d = -3/2$$

4. Consideriamo lo spazio vettoriale $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w = 0\}$.

(a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $f : W \to W$ che verifica le seguenti condizioni:
- $f(1, -1, 1, -1) = (1, -1, -1, 1)$,
- $f(f(w)) = 0$ per ogni $w \in W$.

(b) Determinare $f(-1, 1, 0, 0)$.

(c) Determinare l'insieme di tutti i vettori $w \in W$ tali che $f(w) = (1, -1, -1, 1)$.

(a)
$$W: \begin{cases} x + y = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \qquad W = SPAN\{(\overset{w_1}{1, -1, 0, 0}), (\overset{w_2}{0, 0, 1, -1})\}$$

$$\begin{cases} f(1,-1,1,-1) = f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) = (1,-1,-1,1) \\ f(f(w)) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow f(f(w_1) + f(w_2)) = f(1,-1,-1,1) = f(w_1 - w_2) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{(w_1 + w_2), (w_1 - w_2)\}$ SONO BASE DI $W \Rightarrow f$ ESISTE UNICA

(b)
$$f(-1,1,0,0) = f(-w_1) = -f(w_1) = -\frac{1}{2}[2 f(w_1)] =$$
$$= -\frac{1}{2}[f(w_1) + f(w_2) + f(w_1) - f(w_2)] = -\frac{1}{2}[f(w_1 + w_2) + f(w_1 - w_2)]$$
$$= -\frac{1}{2}[(1,-1,-1,1) + (0,0,0,0)] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

(c)
$$f(w) = (1,-1,-1,1) = f(w_1 + w_2) + \sigma \cdot \overset{=0}{f(w_1 - w_2)} = f((1+\sigma) w_1 + (1-\sigma) w_2)$$
$$\Rightarrow f(w) = (1,-1,-1,1) \ \forall\, w = (1+\sigma) w_1 + (1-\sigma) w_2 = (1+\sigma, -1-\sigma, -1+\sigma, 1-\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$$