

Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 7 Settembre 2026

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = (1 + \log(1 + x))^{1/x}.$$

- (a) Determinare il limite della funzione per $x \rightarrow 0^+$.
- (b) Determinare il limite della funzione per $x \rightarrow +\infty$.
- (c) Determinare un polinomio $P(x)$ tale che

$$f(x) = P(x) + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

2. Consideriamo la funzione

$$g(x) = \frac{4x^2}{x-1} - 9 \log x.$$

- (a) Dimostrare che $x = 3$ è un punto stazionario e determinarne la natura.
- (b) Stabilire se g , vista come $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, è iniettiva e/o surgettiva.
- (c) Stabilire se g è uniformemente continua in $(1, +\infty)$.
- (d) Stabilire se g è uniformemente continua in $(2, +\infty)$.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{nx_n + 1}, \quad x_1 = \alpha > 0.$$

- (a) Dimostrare che, per ogni $\alpha > 0$, la successione è limitata.
- (b) Nel caso $\alpha = 1/2026$, determinare il limite della successione.
- (c) Determinare se esiste un valore $\alpha > 0$ per cui $x_{2026} = 2026$.
- (d) (Bonus question) Nel caso $\alpha = 2026$, determinare il limite della successione.

4. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a)(x^2 + b)} dx.$$

- (a) Studiare, al variare dei parametri reali a e b , la convergenza dell'integrale.
- (b) Per i valori dei parametri per cui converge, determinare esplicitamente il valore.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.