

Esercizio 1(a)

Consideriamo

$$f(x) = (1 + \log(1 + x))^{1/x}.$$

Passando al logaritmo,

$$\log f(x) = \frac{\log(1 + \log(1 + x))}{x}.$$

Poiché, per $x \rightarrow 0^+$,

$$\log(1 + x) \sim x \quad \text{e} \quad \log(1 + \log(1 + x)) \sim \log(1 + x) \sim x,$$

si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log f(x) = 1.$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e.}$$

corretto ma un po' troppo brutale

Alternative

$$\frac{\log(1 + \log(1+x))}{\log(1+x)} \quad \frac{\log(1+x)}{x}$$

oppure Höpital

Spazio per annotazioni

Esercizio 1(b)

Si ha ancora

$$\log f(x) = \frac{\log(1 + \log(1 + x))}{x}.$$

Per $x \rightarrow +\infty$ il numeratore cresce come $\log \log x$, e quindi

$$\frac{\log(1 + \log(1 + x))}{x} \rightarrow 0.$$

Ne segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Ancora qui corretto ma un po' brutale.

Alternative

→ L'Hôpital

→ Stime $\log(x) \leq x \dots$ fino che ci si riduce
a $\frac{\log x}{x}$ pulito

Spazio per annotazioni

Esercizio 1(c)

Per $x \rightarrow 0^+$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Ponendo $u = \log(1+x)$ e usando

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

si ricava

$$\log(1 + \log(1+x)) = x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3).$$

Dunque

$$\log f(x) = 1 - x + \frac{7}{6}x^2 + o(x^2),$$

e quindi

$$f(x) = e \exp\left(-x + \frac{7}{6}x^2 + o(x^2)\right).$$

Poiché

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2),$$

segue

$$f(x) = e \left(1 - x + \frac{5}{3}x^2 + o(x^2)\right).$$

Pertanto si può scegliere

$$P(x) = e - ex + \frac{5e}{3}x^2.$$

Impeccabile 😊

Spazio per annotazioni

Esercizio 2(a)

Consideriamo

$$g(x) = \frac{4x^2}{x-1} - 9 \log x.$$

La derivata è

$$g'(x) = \frac{4x(x-2)}{(x-1)^2} - \frac{9}{x} = \frac{4x^3 - 17x^2 + 18x - 9}{x(x-1)^2}.$$

Il numeratore si fattorizza come

$$4x^3 - 17x^2 + 18x - 9 = (x-3)(4x^2 - 5x + 3),$$

quindi

$$g'(x) = \frac{(x-3)(4x^2 - 5x + 3)}{x(x-1)^2}.$$

Poiché

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -23 < 0,$$

si ha $4x^2 - 5x + 3 > 0$ per ogni x . Sul dominio positivo il denominatore è positivo, quindi il segno di g' coincide con quello di $x-3$.

Ne segue che $g'(3) = 0$, che g è decrescente su $(1, 3)$ e crescente su $(3, +\infty)$.

$x = 3$ è un punto di minimo stretto.

↑
locale

Beve ☺

Spazio per annotazioni

Esercizio 2(b)

Per $0 < x < 1$ si ha $x - 3 < 0$, dunque

$$g'(x) < 0.$$

Pertanto g è strettamente decrescente su $(0, 1)$ e quindi è iniettiva.

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty,$$

perché $4x^2/(x-1) \rightarrow 0$ e $-9 \log x \rightarrow +\infty$, mentre

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty,$$

perché $4x^2/(x-1) \rightarrow -\infty$ e $-9 \log x \rightarrow 0$.

Per continuità g assume tutti i valori reali.

$g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva e surgettiva.

OK

Spazio per annotazioni

Esercizio 2(c)

Supponiamo, per assurdo, che g sia uniformemente continua in $(1, +\infty)$. Allora la sua restrizione a $(1, 2)$ sarebbe uniformemente continua.

Una funzione uniformemente continua su $(1, 2)$ ammette estensione continua alla chiusura $[1, 2]$.

Ma

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty,$$

perché

$$\frac{4x^2}{x-1} \rightarrow +\infty, \quad -9 \log x \rightarrow 0.$$

Quindi g non può essere estesa con continuità in $x = 1$.

g non è uniformemente continua in $(1, +\infty)$.

Ok

Spazio per annotazioni

Esercizio 2(d)

Riscriviamo la derivata nella forma

$$g'(x) = 4 - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{x}.$$

Per $x > 2$ si ha

$$|g'(x)| \leq 4 + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{9}{x} \leq 4 + 4 + \frac{9}{2}.$$

Dunque g' è limitata in $(2, +\infty)$.

Per il teorema di Lagrange esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y| \quad \forall x, y > 2.$$

Quindi g è Lipschitziana su $(2, +\infty)$.

g è uniformemente continua in $(2, +\infty)$.

Alternativa : dedurre la limitatezza della derivata dall'avere limite finito per $x \rightarrow +\infty$, citando una opportuna variante del teorema di Weierstrass

Esercizio 3(a)

La ricorrenza è

$$x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{nx_n + 1}, \quad x_1 = \alpha > 0.$$

Se $x_n > 0$, allora $x_{n+1} > 0$ e

$$x_{n+1} = x_n \frac{nx_n}{nx_n + 1} < x_n.$$

Per induzione,

$$0 < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 = \alpha.$$

Pertanto

$$\boxed{0 < x_n \leq \alpha \quad \text{per ogni } n,}$$

e quindi la successione è limitata.

OK

Spazio per annotazioni

Esercizio 3(b)

Nel caso $\alpha = 1/2026$, dimostriamo per induzione che

$$x_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Per $n = 1$,

$$x_1 = \frac{1}{2026} \leq \frac{1}{2}.$$

Supponiamo ora $x_n \leq 2^{-n}$. Poiché

$$x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{nx_n + 1} \leq nx_n^2,$$

si ha

$$x_{n+1} \leq \frac{n}{2^{2n}}.$$

Essendo $n \leq 2^{n-1}$ per ogni $n \geq 1$,

$$\frac{n}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

L'induzione è completa. Quindi

$$0 < x_n \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0.$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.}$$

Questa è probabilmente la via più breve

Doveva ricordare il classico esercizio

$$x_{n+1} = nx_n^2$$

o il suo amico

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$$

che vengono spesso svolti come esempi classici a lezione

Spazio per annotazioni

Esercizio 3(c)

Per ogni n consideriamo

$$\varphi_n(t) = \frac{nt^2}{nt+1}, \quad t > 0.$$

Essa è continua e strettamente crescente, perché

$$\varphi'_n(t) = \frac{nt(nt+2)}{(nt+1)^2} > 0.$$

Di conseguenza x_{2026} , considerato come funzione del dato iniziale α , è continuo e strettamente crescente.

Per $\alpha = 2026$, dal punto (a),

$$x_{2026} < x_1 = 2026.$$

D'altra parte, poiché $\varphi_n(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, iterando si ottiene

$$x_{2026}(\alpha) \rightarrow +\infty \quad \text{per } \alpha \rightarrow +\infty.$$

Per il teorema dei valori intermedi esiste quindi un $\alpha > 2026$ tale che

$$x_{2026} = 2026.$$

La stretta monotonia garantisce inoltre l'unicità.

Esiste un unico $\alpha > 0$ tale che $x_{2026} = 2026$.

Qui forse si poteva spiegare meglio.

La morale è che, per ogni $n \geq 1$, la funzione

$$\alpha \rightarrow x_n(\alpha)$$

è surgettiva come funzione $(0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

in quanto composizione di funzioni surgettive

Esercizio 3(d) - Bonus

Dal punto (a), la successione è positiva e decrescente; quindi esiste

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0.$$

Inoltre

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{nx_n^2}{nx_n + 1} = \frac{x_n}{nx_n + 1} = \frac{1}{n + 1/x_n}.$$

Supponiamo per assurdo che $\ell > 0$. Poiché $x_n \geq \ell$,

$$\frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\ell},$$

e quindi

$$x_n - x_{n+1} \geq \frac{1}{n + 1/\ell}.$$

Sommando da N a m ,

$$x_N - x_{m+1} \geq \sum_{n=N}^m \frac{1}{n + 1/\ell}.$$

Il membro di sinistra è limitato, mentre quello di destra diverge come una serie armonica traslata. Contraddizione.

Pertanto

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.}$$

Ottimo ☺

[Ovviamente si poteva fare così anche il p.to cii)]

Spazio per annotazioni

Esercizio 4(a)

Consideriamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a)(x^2+b)} dx.$$

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x^2}{(x^2+a)(x^2+b)} \sim \frac{1}{x^2},$$

quindi all'infinito non vi sono problemi.

Se $a < 0$, il fattore $x^2 + a$ si annulla in $x = \sqrt{-a} > 0$, producendo una singolarità non integrabile. Lo stesso vale se $b < 0$.

È quindi necessario che $a, b \geq 0$. Se $a, b > 0$, l'integranda è continua vicino a 0. Se, ad esempio, $a = 0$ e $b > 0$, allora

$$\frac{x^2}{x^2(x^2+b)} = \frac{1}{x^2+b},$$

che è limitata vicino a 0. Analogo discorso se $b = 0 < a$.

Se invece $a = b = 0$, l'integranda è $1/x^2$, e l'integrale diverge in 0.

$$\boxed{a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).}$$

Il discorso della singolarità non integrabile andava spiegato un po' meglio con i dovuti confronti o cambi di variabile, precisando che questo porta a

→ indeterminatezza se $a \neq b$

→ divergenza a $+\infty$ se $a=b$

Spazio per annotazioni

Esercizio 4(b)

Supponiamo dapprima $a, b > 0$ e $a \neq b$. Si ha

$$\frac{x^2}{(x^2 + a)(x^2 + b)} = \frac{1}{b - a} \left(\frac{b}{x^2 + b} - \frac{a}{x^2 + a} \right).$$

Poiché

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + c} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}} \quad (c > 0),$$

segue

$$I = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\pi}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}.$$

Se invece $a = b > 0$, la decomposizione precedente non è applicabile e il caso va trattato direttamente:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a)^2} dx.$$

Con il cambio di variabile $x = \sqrt{a} t$ otteniamo

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Ponendo ora $t = \tan \theta$,

$$\frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt = \sin^2 \theta d\theta,$$

perciò

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4\sqrt{a}}.$$

Questo coincide con la formula precedente, perché per $a = b$

$$\frac{\pi}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\pi}{4\sqrt{a}}.$$

Infine, se $a = 0 < b$,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + b} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}},$$

e analogamente se $b = 0 < a$.

Pertanto, in tutti i casi di convergenza,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a)(x^2 + b)} dx = \frac{\pi}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})}}.$$

Qui bene. Il caso $a = b$ si può trattare anche con l'algoritmo classico per le frazioni razionali.

Spazio per annotazioni