

Soluzioni dello scritto di Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica – Pisa, 18 luglio 2026

Ogni punto è impaginato su una pagina separata, per lasciare spazio ad annotazioni e commenti.

Indice

1	Esercizio 1(a): Taylor di ordine 3	2
2	Esercizio 1(b): limitatezza su $\mathbb{R}$	3
3	Esercizio 2(a): parti principali di g	4
4	Esercizio 2(b): uniforme continuità e Hölderianità	5
5	Esercizio 3(a): limite della successione	6
6	Esercizio 3(b): bonus per $\alpha = 2026$	7
7	Esercizio 4(a): globalità della soluzione	9
8	Esercizio 4(b): globalità e limitatezza	10
9	Esercizio 4(c): integrale per $\alpha = 2026$	11

Soluzioni by ChatGPT commentate

1. Esercizio 1(a): Taylor di ordine 3

Consideriamo

$$f(x) = \log(1 + x + x^2) - \sin(x + x^4) - \frac{1}{2}\log(1 + x^2).$$

Vogliamo determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 con centro in $x = 0$.

Per il primo termine poniamo $y = x + x^2$ e usiamo

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

Poiché

$$(x + x^2)^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3), \quad (x + x^2)^3 = x^3 + o(x^3),$$

si ottiene

$$\log(1 + x + x^2) = x + x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

cioè

$$\log(1 + x + x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

Inoltre

$$\sin(x + x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

perché il termine x^4 non contribuisce fino all'ordine 3, e

$$\frac{1}{2}\log(1 + x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Pertanto

$$P_3(x) = -\frac{1}{2}x^3.$$

Qui direi impeccabile

2. Esercizio 1(b): limitatezza su $\mathbb{R}$

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, perché

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \quad 1 + x^2 > 0.$$

Studiamo il comportamento per $|x| \rightarrow +\infty$. Si ha

$$\log(1 + x + x^2) = 2 \log |x| + o(1),$$

e

$$\frac{1}{2} \log(1 + x^2) = \log |x| + o(1).$$

Dunque la parte logaritmica vale

$$\log(1 + x + x^2) - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) = \log |x| + o(1).$$

Il termine $-\sin(x+x^4)$ è limitato tra -1 e 1 , quindi non può compensare la crescita logaritmica.

Ne segue che

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty.$$

Essendo continua su tutto $\mathbb{R}$ e divergendo a $+\infty$ per $|x| \rightarrow +\infty$, la funzione ammette minimo assoluto. Quindi è limitata inferiormente.

D'altra parte, proprio perché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, non è limitata superiormente.

In conclusione,

f è limitata inferiormente, ma non superiormente.

Citare esplicitamente Weierstrass generalizzato

Alternativa per i limiti

$$f(x) \geq \log \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 1$$

poi raccogliimenti dentro il log

3. Esercizio 2(a): parti principali di g

Consideriamo

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan(t^2)}{1+t^2} dt, \quad x \geq 0.$$

Poniamo

$$\varphi(t) = \frac{\arctan(t^2)}{1+t^2}.$$

Per $t \rightarrow 0^+$ si ha

$$\arctan(t^2) \sim t^2, \quad \frac{1}{1+t^2} \sim 1,$$

quindi

$$\varphi(t) \sim t^2.$$

Pertanto

$$g(x) \sim \int_x^{2x} t^2 dt = \frac{(2x)^3 - x^3}{3} = \frac{7}{3}x^3.$$

Dunque

$$\boxed{g(x) \sim \frac{7}{3}x^3 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+}.$$

Qui è tutto troppo
brutale. Come minimo
ci vorrebbero gli
o piccolo

Per $t \rightarrow +\infty$ si ha invece

$$\arctan(t^2) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad 1+t^2 \sim t^2,$$

quindi

$$\varphi(t) \sim \frac{\pi}{2t^2}.$$

Allora

$$g(x) \sim \int_x^{2x} \frac{\pi}{2t^2} dt = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{\pi}{4x}.$$

Quindi

$$\boxed{g(x) \sim \frac{\pi}{4x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty}.$$

come sopra

Per scongiurare ogni dubbio si può fare de L'Hopital.

4. Esercizio 2(b): uniforme continuità e Hölderianità

Con

$$\varphi(t) = \frac{\arctan(t^2)}{1+t^2},$$

la funzione è

$$g(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt.$$

Per il teorema di derivazione degli integrali con estremi variabili,

$$g'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x).$$

La funzione φ è limitata in $[0, +\infty)$, perché

$$0 \leq \arctan(t^2) \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1+t^2 \geq 1.$$

Quindi g' è limitata:

$$|g'(x)| \leq 2\|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty = 3\|\varphi\|_\infty.$$

Ne segue che g è Lipschitziana in $[0, +\infty)$.

In particolare g è uniformemente continua ed è Hölderiana di esponente 1.

Se si vuole anche la Hölderianità per esponenti $0 < \gamma < 1$, basta osservare che g è limitata: infatti è continua, tende a 0 per $x \rightarrow 0^+$ e tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$. Una funzione limitata e Lipschitziana è Hölderiana per ogni esponente $0 < \gamma \leq 1$.

Dunque

g è uniformemente continua ed è Hölderiana, anzi Lipschitziana.

↑ Va dimostrato che questo implica la limitatezza

È importante che Lipschitz $\Rightarrow$ Hölder vale solo se in aggiunta è pure limitata.

Alternativa per la limitatezza di g

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{\arctan t^2}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \dots \leq \underbrace{\frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt}_{= \frac{\pi}{2}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

5. Esercizio 3(a): limite della successione

La successione è definita da

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{1+x_n}, \quad x_0 = \alpha > 0.$$

Il punto fisso soddisfa

$$\ell = \frac{1+\ell^2}{1+\ell},$$

ossia

$$\ell + \ell^2 = 1 + \ell^2.$$

Quindi l'unico punto fisso è

$$\ell = 1.$$

Studiamo monotonia e invarianti. Si ha

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1+x_n^2}{1+x_n} - 1 = \frac{x_n(x_n-1)}{1+x_n}.$$

Dunque il segno di $x_{n+1} - 1$ è lo stesso del segno di $x_n - 1$.

Inoltre

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1+x_n^2}{1+x_n} - x_n = \frac{1-x_n}{1+x_n}.$$

Quindi:

- se $0 < x_n < 1$, allora $x_{n+1} > x_n$ e $x_{n+1} < 1$;
- se $x_n > 1$, allora $x_{n+1} < x_n$ e $x_{n+1} > 1$;
- se $x_n = 1$, allora la successione è costante.

Perciò, per ogni $\alpha > 0$, la successione è monotona e limitata, quindi converge. Il limite deve essere l'unico punto fisso, cioè 1.

In conclusione,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Qui si possono fare i piani standard con la monotonia

$$\alpha \in (0,1)$$

$$\alpha \geq 1$$

$$(i) \quad 0 < x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(i) \quad x_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad x_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad x_n \rightarrow \ell$$

$$(iv) \quad \ell = 1$$

$$(iv) \quad \ell = 1$$

Gli svolgimenti, se fatti nell'ordine, sono del tutto standard

Un disegno aiutava molto!

6. Esercizio 3(b): bonus per $\alpha = 2026$

Nel caso $\alpha = 2026$, la successione è decrescente e resta sempre maggiore di 1. Poniamo

$$y_n = x_n - 1 > 0.$$

Allora

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 1 = \frac{x_n(x_n - 1)}{1 + x_n} = \frac{(1 + y_n)y_n}{2 + y_n}.$$

Quindi

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1 + y_n}{2 + y_n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

In particolare

$$\sqrt[n]{y_n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Dobbiamo studiare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n (1 - \sqrt[n]{x_n}), \quad b > 0.$$

Poiché $x_n > 1$, si ha $\sqrt[n]{x_n} > 1$, dunque il termine tra parentesi è negativo. Inoltre

$$\sqrt[n]{x_n} = \exp\left(\frac{\log x_n}{n}\right),$$

e, dato che $x_n \rightarrow 1$,

$$\log x_n \sim x_n - 1 = y_n.$$

Pertanto

$$1 - \sqrt[n]{x_n} = 1 - \exp\left(\frac{\log x_n}{n}\right) \sim -\frac{\log x_n}{n} \sim -\frac{y_n}{n}.$$

Il limite ha quindi lo stesso comportamento di

$$-\frac{b^n y_n}{n}.$$

Poiché $\sqrt[n]{y_n} \rightarrow 1/2$, la soglia è $b = 2$.

Se $0 < b < 2$, allora $b^n y_n \rightarrow 0$ esponenzialmente, e dunque il limite è 0.

Se $b = 2$, serve un filo di attenzione in più. Per n grande la successione y_n è piccola, e

$$\frac{2y_{n+1}}{y_n} = \frac{2(1 + y_n)}{2 + y_n} = 1 + \frac{y_n}{2 + y_n}.$$

D'altra parte, da $y_{n+1}/y_n \rightarrow 1/2$ segue che y_n è definitivamente dominata da una progressione geometrica di ragione minore di 1, quindi

$$\sum_n y_n < +\infty.$$

Pertanto il prodotto

$$2^n y_n = y_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2y_{k+1}}{y_k} = y_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{y_k}{2 + y_k}\right)$$

rimane limitato, perché il prodotto infinito converge. Ne segue

$$\frac{2^n y_n}{n} \rightarrow 0.$$

Se $b > 2$, scegliamo r tale che

$$\frac{1}{b} < r < \frac{1}{2}.$$

Poiché $y_{n+1}/y_n \rightarrow 1/2$, definitivamente $y_{n+1} \geq r y_n$, e quindi $b^n y_n/n \rightarrow +\infty$.

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n (1 - \sqrt[n]{x_n}) = \begin{cases} 0, & 0 < b \leq 2, \\ -\infty, & b > 2. \end{cases}$$

Morale: vogliamo dimostrare che $x_n \sim 1 + \frac{z_n}{2^n}$

dove $z_n \rightarrow z \in \mathbb{R}$. Da questo segue tutto il resto.

Da dove deriva $\frac{1}{2^n}$? Dal fatto che $f'(1) = \frac{1}{2}$ dove $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$

che cosa risolve z_n ?

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n \frac{1+y_n}{1+\frac{y_n}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{y_n}{2+y_n}\right) \end{aligned}$$

da cui l'idea di studiare la convergenza della produttoria

7. Esercizio 4(a): globalità della soluzione

Consideriamo

$$u'(t) = u(t)^2 e^{-t}, \quad u(0) = \alpha.$$

L'equazione è separabile. Se $\alpha = 0$, la soluzione è

$$u(t) \equiv 0.$$

Se $\alpha \neq 0$, allora

$$\frac{u'}{u^2} = e^{-t}.$$

Integrando,

$$-\frac{1}{u} = -e^{-t} + C,$$

cioè

$$\frac{1}{u} = e^{-t} + C_1.$$

Imponendo il dato iniziale,

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + C_1, \quad C_1 = \frac{1}{\alpha} - 1.$$

Quindi

$$u(t) = \frac{\alpha}{\alpha e^{-t} + 1 - \alpha}.$$

← Questa vale anche per $\alpha = 0$.

La soluzione è globale se il denominatore non si annulla mai:

$$\alpha e^{-t} + 1 - \alpha \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha < 0$, il denominatore tende a $-\infty$ per $t \rightarrow -\infty$ e tende a $1 - \alpha > 0$ per $t \rightarrow +\infty$: quindi si annulla.

Se $0 \leq \alpha \leq 1$, il denominatore è sempre positivo, e la soluzione è globale.

Se $\alpha > 1$, il denominatore si annulla per un tempo positivo, perché

$$\alpha e^{-t} + 1 - \alpha = 0 \iff t = \log \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Pertanto

la soluzione è globale se e solo se $0 \leq \alpha \leq 1$.

Qui tutto ok

8. Esercizio 4(b): globalità e limitatezza

Dal punto precedente, le uniche soluzioni globali corrispondono a

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Per $\alpha = 0$ la soluzione è nulla, dunque è limitata.

Se $0 < \alpha < 1$, allora

$$u(t) = \frac{\alpha}{\alpha e^{-t} + 1 - \alpha}.$$

Per $t \rightarrow -\infty$ si ha $e^{-t} \rightarrow +\infty$, quindi

$$u(t) \rightarrow 0.$$

Per $t \rightarrow +\infty$ si ha

$$u(t) \rightarrow \frac{\alpha}{1 - \alpha},$$

che è finito. Quindi la soluzione è limitata.

Se invece $\alpha = 1$, la soluzione è

$$u(t) = e^t,$$

che è globale ma non limitata.

Concludiamo che

la soluzione è globale e limitata se e solo se $0 \leq \alpha < 1$.

*Qui sarebbe opportuno citare
qualcosa per dedurre la
limitatezza dai limiti*

9. Esercizio 4(c): integrale per $\alpha = 2026$

Nel caso $\alpha = 2026$,

$$u(t) = \frac{2026}{2026e^{-t} - 2025}.$$

Il denominatore si annulla quando

$$2026e^{-t} - 2025 = 0,$$

cioè

$$e^{-t} = \frac{2025}{2026}.$$

Dunque

$$T = \log \frac{2026}{2025},$$

e l'intervallo massimale contenente 0 è

$$I = (-\infty, T).$$

Su I la soluzione è positiva.

Studiamo la convergenza di

$$\int_I u(t)^c dt.$$

Per $t \rightarrow -\infty$ si ha

$$u(t) \sim e^t,$$

quindi

$$u(t)^c \sim e^{ct}.$$

L'integrale converge a $-\infty$ se e solo se

$$c > 0.$$

Per $t \rightarrow T^-$, il denominatore si annulla linearmente. Infatti

$$2026e^{-t} - 2025 \sim 2025(T - t),$$

e quindi

$$u(t) \sim \frac{C}{T - t}$$

per una costante positiva C . Allora

$$u(t)^c \sim \frac{C^c}{(T - t)^c}.$$

L'integrale converge vicino a T se e solo se

$$c < 1.$$

Mettendo insieme le due condizioni,

$$\boxed{\int_I u(t)^c dt \text{ converge se e solo se } 0 < c < 1.}$$

*Tutto vero, ma
andrebbe giustificato,
ad esempio con
de L'Hopital*