

Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 18 Luglio 2026

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \log(1 + x + x^2) - \sin(x + x^4) - \frac{1}{2} \log(1 + x^2).$$

- (a) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x)$ con centro in $x = 0$.
- (b) Stabilire se la funzione è limitata inferiormente/superiormente su tutto $\mathbb{R}$.

2. Consideriamo la funzione

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan(t^2)}{1 + t^2} dt.$$

- (a) Determinare la parte principale di $g(x)$ per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$.
- (b) Stabilire se la funzione è uniformemente continua e/o Hölderiana in $[0, +\infty)$.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n}, \quad x_0 = \alpha.$$

- (a) Determinare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il limite della successione.
- (b) (Bonus question) Nel caso particolare $\alpha = 2026$, determinare, al variare del parametro reale positivo b , il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n (1 - \sqrt[n]{x_n}).$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'(t) = u(t)^2 e^{-t}, \quad u(0) = \alpha.$$

- (a) Determinare per quali valori di α la soluzione è globale.
- (b) Determinare per quali valori di α la soluzione è globale e limitata.
- (c) Nel caso particolare $\alpha = 2026$, detto I l'intervallo massimale di esistenza, studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_I u(t)^c dt$$

al variare del parametro reale c .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.