Soluzioni dello scritto di Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica - Pisa, 28 giugno 2026

chissà perché
ha messo 28 giugno :)

Documento preparato per annotazioni: ogni esercizio inizia su una pagina nuova; anche la bonus question dell'esercizio 3 è separata.

Soluzioni by ChatGPT
con commenti umani

Massimo Gobbino - bozza di soluzioni

Esercizio 1 - Successione con parametro

Consideriamo

$$a_n = \sqrt[3]{n^6 + n^\alpha + 1} - \sqrt{n^4 + n + 1}, \qquad \alpha > 0.$$

Raccogliamo i termini principali:

$$\sqrt[3]{n^6 + n^\alpha + 1} = n^2 \left(1 + n^{\alpha-6} + n^{-6}\right)^{1/3},$$

$$\sqrt{n^4 + n + 1} = n^2 \left(1 + n^{-3} + n^{-4}\right)^{1/2}.$$

Per $\alpha < 6$, usando gli sviluppi

$$(1+\varepsilon)^{1/3} = 1 + \frac{\varepsilon}{3} + o(\varepsilon), \qquad (1+\varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \left[\frac{1}{3} n^{\alpha-6} - \frac{1}{2} n^{-3} + o\left(n^{\alpha-6} + n^{-3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3} n^{\alpha-4} - \frac{1}{2} n^{-1} + o\left(n^{\alpha-4} + n^{-1}\right). \end{aligned}$$

Questi sono gli ordini corretti. Senza ipotesi su α non sappiamo chi comanda

Distinguiamo ora i casi.

- Se $0 < \alpha < 3$, il termine dominante è $-\frac{1}{2}n^{-1}$, dunque
$$a_n \sim -\frac{1}{2n} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \to 0^-.$$
- Se $\alpha = 3$, allora
$$a_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) n^{-1} + o(n^{-1}) = -\frac{1}{6} n^{-1} + o(n^{-1}),$$
perciò ancora
$$a_n \to 0^-.$$
- Se $3 < \alpha < 4$, il termine dominante è positivo:
$$a_n \sim \frac{1}{3} n^{\alpha-4},$$
quindi
$$a_n \to 0^+.$$
- Se $\alpha = 4$, si ha
$$a_n \to \frac{1}{3}.$$
- Se $4 < \alpha < 6$, allora
$$\frac{1}{3} n^{\alpha-4} \to +\infty,$$
e quindi
$$a_n \to +\infty.$$

Restano i casi $\alpha \geq 6$. Se $\alpha = 6$, allora

$$\sqrt[3]{n^6 + n^6 + 1} \sim \sqrt[3]{2}\, n^2, \qquad \sqrt{n^4 + n + 1} \sim n^2,$$

perciò

$$a_n \sim (\sqrt[3]{2} - 1) n^2 \to +\infty.$$

Se $\alpha > 6$, il primo termine cresce come $n^{\alpha/3}$, che domina n^2, dunque di nuovo $a_n \to +\infty$.

Risposta

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0, & 0<\alpha<4, \\ \dfrac{1}{3}, & \alpha = 4, \\ +\infty, & \alpha > 4. \end{cases}}$$

Inoltre

$$\boxed{a_n \to 0^- \quad \Longleftrightarrow \quad 0<\alpha\leq 3.}$$

Soluzione sostanzialmente corretta. Poco da aggiungere.

Per i casi con $\alpha \geq 6$ si poteva osservare che la successione è maggiore di quella con, per esempio, $\alpha = 5$ e quindi chiudere per confronto.

Domanda: perché ha dovuto trattare i casi $\alpha = 6$ e $\alpha > 6$ separatamente dal resto?

Esercizio 2 - Funzione $(x + \sin x)^x$

Consideriamo

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x + \sin x)^x.$$

La funzione è ben definita per $x > 0$, poiché $x + \sin x > 0$.

Conviene studiare

$$h(x) = \log f(x) = x \log(x + \sin x).$$

Allora $f = e^h$ e

$$h'(x) = \log(x + \sin x) + x\frac{1 + \cos x}{x + \sin x}.$$

(a) Iniettività

Per $x \to 0^+$ si ha

$$x + \sin x \sim 2x,$$

perciò

$$h(x) = x \log(x + \sin x) \sim x \log(2x) \to 0^-.$$

(citare qui il limite dimenticato)

Quindi

$$f(x) \to 1^- \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Inoltre

$$h'(x) = \log(x + \sin x) + x\frac{1 + \cos x}{x + \sin x} \to -\infty \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

(spiegare per colpa di chi)

Dunque f è strettamente decrescente in un intorno destro di 0.

D'altra parte

$$f(1) = 1 + \sin 1 > 1.$$

Poiché vicino a 0 la funzione assume valori minori di 1 e poi arriva a un valore maggiore di 1, per continuità alcuni valori vengono assunti due volte. La funzione non è dunque iniettiva.

Risposta

$$\boxed{f \text{ non è iniettiva in } (0, +\infty).}$$

(b) Massimo e minimo su tutto $(0, +\infty)$

Abbiamo già visto che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Invece, per $x \to +\infty$,

$$x + \sin x \sim x,$$

e quindi

$$f(x) = (x + \sin x)^x \sim x^x \to +\infty.$$

La funzione non ammette massimo, perché è illimitata superiormente.

Per il minimo, osserviamo che vicino a 0 si hanno valori minori di 1, mentre per x grande la funzione tende a $+\infty$. Possiamo quindi restringerci a un intervallo compatto $[\delta, R]$, con $\delta > 0$ piccolo e R grande, sul quale la funzione continua assume minimo. Tale minimo è anche minimo assoluto su tutto $(0, +\infty)$.

Qui sta cercando di adattare la dim. di Weierstrass generalizzato, ma avrebbe fatto meglio. Ad esempio definendo δ ed R tali che

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0, \delta)$ e $f'(x) > 0 \quad \forall x \geq R$

Risposta

$\boxed{f \text{ ammette minimo assoluto, ma non massimo assoluto.}}$

(c) Uniforme continuità e Lipschitzianità in $(0, 2026)$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,$$

la funzione si estende con continuità a $[0, 2026]$ ponendo $f(0) = 1$. Per il teorema di Heine-Cantor, l'estensione è uniformemente continua su $[0, 2026]$. Ne segue che f è uniformemente continua in $(0, 2026)$.

Per la Lipschitzianità, invece, osserviamo che

$$f'(x) = f(x)h'(x).$$

Siccome $f(x) \to 1$ e $h'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$, si ha

$$f'(x) \to -\infty.$$

Una funzione Lipschitziana e derivabile deve avere derivata limitata in modulo nei punti in cui è derivabile. Quindi f non è Lipschitziana in $(0, 2026)$.

Risposta

$\boxed{f \text{ è uniformemente continua, ma non è Lipschitziana in } (0, 2026).}$

Commenti

(a) Avrei preferito i limiti spiegati meglio con i raccoglimenti.
Anche un disegno avrebbe aiutato

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(\delta) < 1$

$f(x) > 1$ per x grandi

$\leadsto f(x) = \frac{1+f(\delta)}{2}$ per almeno due valori di x

(b) Andavano definiti bene δ ed R per fare la variante di W.

(c) Fatto molto bene

Achtung! Evitare discorsi del tipo: f prima scende, poi sale, quindi c'è un p.to in cui $f'(x)$ passa da negativo a positivo (cosa vuol dire poi?), ma allora lì c'è un minimo, e lì vicino due intersezioni.

L'intuizione può essere ok, ma non è una dim.

Esercizio 3 - Integrali impropri

Consideriamo, al variare di $b > 0$,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{2026})}{x^b}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} x^b \sin(x^{2026})\,dx.$$

Studio di I_1

Vicino a 0,

$$\sin(x^{2026}) \sim x^{2026}.$$

Dunque

$$\frac{\sin(x^{2026})}{x^b} \sim x^{2026-b}.$$

L'integrale converge in 0 se e solo se

$$2026 - b > -1,$$

ok, forse si poteva fare per bene il confronto asintotico

cioè

$$b < 2027.$$

All'infinito facciamo il cambio di variabile

$$y = x^{2026}.$$

Allora

$$dx = \frac{1}{2026} y^{1/2026-1}\,dy, \qquad x^{-b} = y^{-b/2026}.$$

Quindi, all'infinito, l'integrale ha lo stesso comportamento di

$$\int^{\infty} y^{\frac{1-b}{2026}-1} \sin y\,dy.$$

Poiché $b > 0$, l'esponente è negativo; per il criterio di Dirichlet l'integrale converge all'infinito per ogni $b > 0$.

parola magica, ma le ipotesi vanno citate e verificate

Pertanto

$$\boxed{I_1 \text{ converge } \iff 0 < b < 2027.}$$

Per completezza, la convergenza assoluta all'infinito si ha se e solo se

$$\frac{1-b}{2026} - 1 < -1,$$

cioè

$$b > 1.$$

Quindi

$$\boxed{I_1 \text{ converge assolutamente } \iff 1 < b < 2027.}$$

Per $0 < b \leq 1$ la convergenza è soltanto semplice.

Studio di I_2

Vicino a 0,

$$x^b \sin(x^{2026}) \sim x^{b+2026},$$

Il problema in $x=0$ non c'è nemmeno

che è integrabile per ogni $b > 0$.

All'infinito poniamo ancora

$$y = x^{2026}.$$

Due paroline per giustificare il cambio di variabili ci volevano

Si ha

$$x^b\,dx = \frac{1}{2026} y^{\frac{b+1}{2026}-1}\,dy.$$

Si è perso un estremo :)

Dunque bisogna studiare

?

$$\int^{\infty} y^{\frac{b+1}{2026}-1} \sin y\,dy.$$

Per Dirichlet questo integrale converge se l'esponente è negativo:

$$\frac{b+1}{2026} - 1 < 0.$$

Equivalente a

$$b < 2025.$$

Se $b \geq 2025$, l'ampiezza non tende a 0 oppure non decresce a 0, e l'integrale non converge.

↑ Questo è un BLUFF. Va giustificato!

Quindi

$$\boxed{I_2 \text{ converge} \iff 0 < b < 2025.}$$

La convergenza assoluta all'infinito richiederebbe

$$\frac{b+1}{2026} - 1 < -1,$$

cioè $b < -1$, impossibile per $b > 0$. Dunque I_2, quando converge, converge solo semplicemente.

Risposta

$$\boxed{I_1 \text{ converge} \iff 0 < b < 2027,} \qquad \boxed{I_2 \text{ converge} \iff 0 < b < 2025.}$$

Inoltre I_1 converge assolutamente per $1 < b < 2027$, mentre I_2 non converge mai assolutamente per $b > 0$.

Ok, ma va giustificato che $\int_0^{+\infty} y^a \sin y\,dy$ non converge se $a \geq 0$.

Per $a = 0$ è banale (si fa la primitiva).

Per $a > 0$, se convergesse si avrebbe che

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \dots = \underbrace{\int_0^{(2k+1)\pi} \dots - \int_0^{2k\pi} \dots}_{\to 0 \text{ se l'int. impr. converge}}$$

Non tende a zero (si vede con il metodo dei rettangolini).

Esercizio 3 - Bonus question

Consideriamo
$$g(x) = \int_0^x t^{10} \sin(t^{2026})\, dt, \qquad x > 0.$$
Vogliamo stabilire se g ammette massimo per $x > 0$.

Facciamo il cambio di variabile
$$y = t^{2026}.$$
Allora
$$dt = \frac{1}{2026} y^{1/2026-1}\, dy, \qquad t^{10} = y^{10/2026}.$$
Quindi
$$g(x) = \frac{1}{2026} \int_0^{x^{2026}} y^{\frac{11}{2026}-1} \sin y\, dy.$$
Poniamo
$$p = \frac{11}{2026} \in (0,1),$$
e definiamo
$$G(Y) = \int_0^Y y^{p-1} \sin y\, dy.$$
Allora $g(x) = \frac{1}{2026} G(x^{2026})$.

L'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} y^{p-1} \sin y\, dy$$
converge: vicino a 0 non ci sono problemi, poiché $p-1 > -1$, mentre all'infinito si applica il criterio di Dirichlet, poiché $y^{p-1} \to 0$ ed è decrescente.

Ora
$$G'(Y) = Y^{p-1} \sin Y.$$
Quindi G cresce negli intervalli in cui $\sin Y > 0$ e decresce negli intervalli in cui $\sin Y < 0$.

I massimi locali sono nei punti
$$Y_k = (2k+1)\pi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$
cioè, per la funzione g, nei punti
$$x_k = ((2k+1)\pi)^{1/2026}.$$

Mostriamo che questi massimi locali sono decrescenti. Infatti
$$G(Y_{k+1}) - G(Y_k) = \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+3)\pi} y^{p-1} \sin y\, dy.$$
Su $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ il seno è negativo; su $((2k+2)\pi, (2k+3)\pi)$ il seno è positivo. Poiché y^{p-1} è positiva e decrescente, il contributo negativo pesa più del successivo contributo positivo. Quindi
$$G(Y_{k+1}) - G(Y_k) < 0.$$
I massimi locali sono dunque strettamente decrescenti.

Il massimo assoluto è quindi il primo massimo locale, cioè quello corrispondente a
$$Y = \pi, \qquad x = \pi^{1/2026}.$$

Risposta

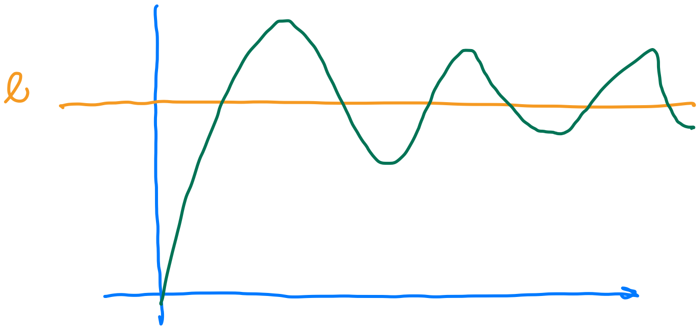
$$\boxed{g \text{ ammette massimo assoluto per } x > 0.}$$

Il massimo viene raggiunto in

$$\boxed{x = \pi^{1/2026}.}$$

La bonus è fatta bene.

L'idea è che $g(x)$ tende ad un limite finito, essendo $10 < 2025$, ma lo fa oscillando intorno a tale valore limite, come le somme parziali delle serie "alla Leibniz"



I massimi locali "scendono" mentre i minimi locali "salgono".

Esercizio 4 - Equazione differenziale

Consideriamo
$$u'''(t) + u'(t) = t^3.$$

(a) Soluzione generale

L'equazione omogenea associata è
$$u''' + u' = 0.$$
L'equazione caratteristica è
$$\lambda^3 + \lambda = 0,$$
cioè
$$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0.$$
Le radici sono
$$\lambda = 0, \qquad \lambda = i, \qquad \lambda = -i.$$
Dunque la soluzione generale dell'omogenea è
$$u_h(t) = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

Cerchiamo una soluzione particolare. Poniamo
$$v(t) = u'(t).$$
Allora
$$v''(t) + v(t) = t^3.$$
Cerchiamo una particolare polinomiale della forma
$$v_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D.$$

Questo non serviva. Bastava cercare sol.
$u(t) = t\,(at^3 + bt^2 + ct + d)$
↑
perché 1 è sol. dell' eq. omogenea, quindi si aggiunge t

Allora
$$v_p''(t) + v_p(t) = At^3 + Bt^2 + (C + 6A)t + (D + 2B).$$
Imponendo
$$v_p'' + v_p = t^3,$$
otteniamo
$$A = 1, \qquad B = 0, \qquad C = -6, \qquad D = 0.$$
Quindi
$$v_p(t) = t^3 - 6t.$$
Integrando,
$$u_p(t) = \frac{t^4}{4} - 3t^2.$$

La soluzione generale dell'equazione è dunque
$$\boxed{u(t) = \frac{t^4}{4} - 3t^2 + C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t.}$$

(b) Soluzioni che evitano il valore 2026

Vogliamo stabilire se esistono soluzioni tali che

$$u(t) \neq 2026 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

È sufficiente esibire un esempio. Prendiamo

$$C_2 = C_3 = 0.$$

Allora

$$u(t) = \frac{t^4}{4} - 3t^2 + C_1.$$

Studiamo il minimo del polinomio

$$p(t) = \frac{t^4}{4} - 3t^2.$$

Si ha

$$p'(t) = t^3 - 6t = t(t^2 - 6),$$

quindi i punti critici sono

$$t = 0, \qquad t = \pm\sqrt{6}.$$

I valori corrispondenti sono

$$p(0) = 0, \qquad p(\pm\sqrt{6}) = \frac{36}{4} - 18 = 9 - 18 = -9.$$

Quindi

$$\min_{t\in\mathbb{R}} p(t) = -9.$$

Se scegliamo

$$C_1 > 2035,$$

allora

$$u(t) = p(t) + C_1 \geq -9 + C_1 > 2026$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare, $u(t)$ non assume mai il valore 2026.

Risposta

$$\boxed{\text{Sì, esistono soluzioni tali che } u(t) \neq 2026 \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}.}$$

Un esempio è

$$\boxed{u(t) = \frac{t^4}{4} - 3t^2 + 2036.}$$