

Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica  
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1  
Pisa, 29 Giugno 2026

1. Consideriamo la successione

$$a_n = \sqrt[3]{n^6 + n^\alpha + 1} - \sqrt{n^4 + n + 1}.$$

- (a) Calcolare il limite di  $a_n$  al variare del parametro reale  $\alpha > 0$ .
- (b) Stabilire se esistono valori del parametro  $\alpha > 0$  per cui  $a_n \rightarrow 0^-$ .

2. Consideriamo la funzione  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = (x + \sin x)^x.$$

- (a) Stabilire se la funzione è iniettiva.
  - (b) Stabilire se la funzione ammette massimo/minimo su tutto  $(0, +\infty)$ .
  - (c) Stabilire se la funzione è uniformemente continua e/o Lipschitziana in  $(0, 2026)$ .
3. (a) Studiare, al variare del parametro reale  $b > 0$ , la convergenza degli integrali

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{2026})}{x^b} dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} x^b \sin(x^{2026}) dx.$$

- (b) (Bonus question) Stabilire se la funzione

$$g(x) = \int_0^x t^{10} \sin(t^{2026}) dt$$

ammette massimo per  $x > 0$ .

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'''(t) + u'(t) = t^3.$$

- (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione.
- (b) Stabilire se esistono soluzioni  $u$  tali che  $u(t) \neq 2026$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.