

Soluzione dello scritto di Analisi 1

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Pisa, 4 giugno 2026

Idea

Questa versione è pensata come soluzione leggibile e annotabile: non contiene solo i risultati, ma anche i passaggi asintotici e gli argomenti qualitativi necessari per giustificarli.

Soluzioni by ChatGPT commentate

Esercizio 1 Limite con parametro

Dobbiamo calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x^4) - \log(1 + x^2 + \lambda x^4)}{(1 + x^6)^{1/5} - \cos(x^3)}.$$

Per il denominatore usiamo gli sviluppi di Taylor:

$$(1 + x^6)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x^6 + o(x^6), \quad \cos(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6).$$

Quindi

$$(1 + x^6)^{1/5} - \cos(x^3) = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)x^6 + o(x^6) = \frac{7}{10}x^6 + o(x^6).$$

Per il numeratore:

$$\sin(x^2 + x^4) = x^2 + x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6),$$

mentre

$$\log(1 + x^2 + \lambda x^4) = x^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x^4 + \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)x^6 + o(x^6).$$

Dunque

$$\sin(x^2 + x^4) - \log(1 + x^2 + \lambda x^4) = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)x^4 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x^6 + o(x^6).$$

Se $\lambda \neq 3/2$, il termine dominante del numeratore è di ordine x^4 , mentre il denominatore è di ordine x^6 . Il rapporto diverge con segno determinato da $3/2 - \lambda$.

Se invece $\lambda = 3/2$, il termine in x^4 si annulla e rimane

$$\sin(x^2 + x^4) - \log\left(1 + x^2 + \frac{3}{2}x^4\right) = x^6 + o(x^6).$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x^4) - \log\left(1 + x^2 + \frac{3}{2}x^4\right)}{(1 + x^6)^{1/5} - \cos(x^3)} = \frac{1}{7/10} = \frac{10}{7}.$$

Risultato

$$\begin{cases} +\infty, & \lambda < \frac{3}{2}, \\ \frac{10}{7}, & \lambda = \frac{3}{2}, \\ -\infty, & \lambda > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Qui direi che è fatto bene, a parte la box finale che è troppo compressa 😊

Esercizio 2 La funzione $f(x) = (1 + \sin x)^x$

Consideriamo

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + \sin x)^x.$$

Immagine

Poichè $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$, si ha sempre $f(x) \geq 0$. Inoltre $f(x) = 0$ nei punti

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \geq 0.$$

D'altra parte, nei punti

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

si ha

$$f(x) = 2^x = 2^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \rightarrow +\infty.$$

Per continuità, tra uno zero e un punto in cui la funzione assume valori arbitrariamente grandi, vengono assunti tutti i valori positivi. Quindi

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty).$$

Qui citerei anche che l'insieme di def. è connesso

Risultato

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty).$$

Soluzioni di $f(x) = 2026$

L'equazione è

$$(1 + \sin x)^x = 2026.$$

Quando $\sin x \leq 0$, si ha $1 + \sin x \leq 1$, quindi $f(x) \leq 1$ e non ci sono soluzioni. Le soluzioni possono trovarsi solo negli intervalli

$$(2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{N},$$

dove $\sin x > 0$.

In ciascuno di questi intervalli la funzione vale 1 agli estremi, mentre nel punto centrale

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

si ha

$$f(x_k) = 2^{x_k} \rightarrow +\infty.$$

Per tutti i k sufficientemente grandi vale quindi $f(x_k) > 2026$; per il teorema dei valori intermedi, in ognuno di tali intervalli ci sono almeno due soluzioni. Ne segue che le soluzioni sono infinite.

Risultato

L'equazione $f(x) = 2026$ ha infinite soluzioni.

Continuità uniforme e Lipschitzianità

Nei punti

$$a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

si ha $f(a_k) = 2^{a_k}$. Dove $1 + \sin x > 0$, derivando otteniamo

$$f'(x) = f(x) \left[\log(1 + \sin x) + x \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right].$$

è importante capire che qui sta BARANDO

In particolare,

$$f'(a_k) = 2^{a_k} \log 2 \rightarrow +\infty.$$

Una funzione Lipschitziana su un intervallo ha, dove derivabile, derivata limitata in modulo dalla costante di Lipschitz. Qui la derivata non è limitata: dunque f non è Lipschitziana.

Inoltre, prendendo $h_k = 2^{-a_k}$, si ha $h_k \rightarrow 0$ e, per il teorema di Lagrange applicato vicino ad a_k ,

$$f(a_k + h_k) - f(a_k) \sim f'(a_k)h_k = 2^{a_k} \log 2 2^{-a_k} = \log 2.$$

Questa è una brutalata!

Quindi esistono coppie di punti a distanza infinitesima per cui i valori della funzione restano separati da una quantità non infinitesima. La funzione non è uniformemente continua.

Risultato

f non è uniformemente continua e non è Lipschitziana in $(0, +\infty)$.

Sul punto (c) la soluzione più semplice è osservare che, se f fosse unif. cont., allora sarebbe sublineare, cioè

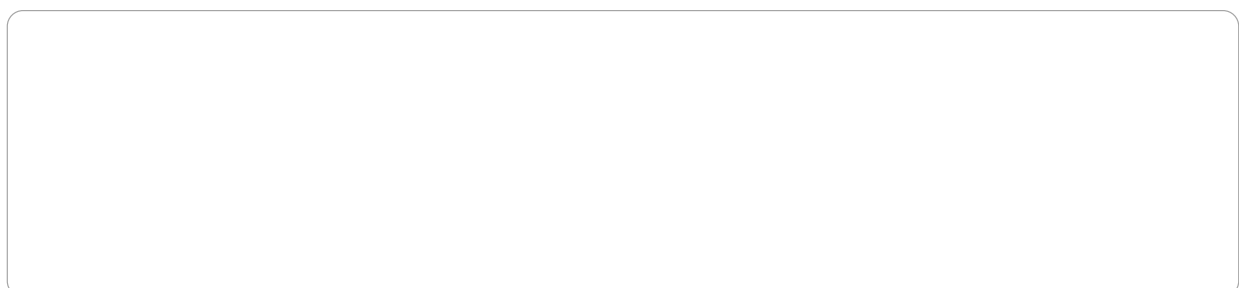
$$f(x) \leq Ax + B \quad \forall x > 0$$

per opportune costanti A e B . Ma questo non è possibile se si prende

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightsquigarrow \text{cresce lineare in } k$$

$$f(x_k) = 2^{x_k} \quad \rightsquigarrow \text{cresce esponenziale in } k$$

Non essendo unif. cont., non può nemmeno essere lip.



Esercizio 3 Funzione integrale e successione ricorsiva

Sia

$$g(x) = \int_0^x \arctan(t^2) dt, \quad x_{n+1} = \frac{1}{n}g(nx_n), \quad x_1 = \alpha.$$

Parti principali di g

Per $x \rightarrow 0$,

$$\arctan(t^2) \sim t^2,$$

quindi

$$g(x) \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}.$$

Per $x \rightarrow +\infty$, invece,

$$\arctan(t^2) \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

e quindi

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2}x.$$

Brutalmente ok, ma bisogna giustificare rigorosamente, ad esempio con l'Hôpital

Risultato

$$g(x) \sim \frac{x^3}{3} \quad (x \rightarrow 0), \quad g(x) \sim \frac{\pi}{2}x \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Una variabile più naturale

Pongo

$$y_n = nx_n.$$

Allora

$$y_{n+1} = (n+1)x_{n+1} = \frac{n+1}{n}g(nx_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)g(y_n).$$

Quindi la ricorrenza diventa

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)g(y_n).$$

Esistono dati con $x_n \rightarrow +\infty$?

Sì. Infatti, per $y \rightarrow +\infty$,

$$\frac{g(y)}{y} \rightarrow \frac{\pi}{2} > 1.$$

Dunque esistono $M > 0$ e $q > 1$ tali che, per $y \geq M$,

$$g(y) \geq qy.$$

Se scegliamo $\alpha = y_1 \geq M$, allora finchè $y_n \geq M$ vale

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)g(y_n) \geq qy_n.$$

Questo è vero, ma cautela fatta inclusions come si deve

La successione y_n cresce almeno geometricamente, dunque $y_n/n = x_n \rightarrow +\infty$.

Risultato

$$\text{Esistono valori di } \alpha \text{ per cui } x_n \rightarrow +\infty.$$

Carina l'idea di cambiare variabile, ma si può fare senza

$$(c) \quad g(x) \leq \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}, \quad \text{quindi} \quad x_{n+1} = \frac{1}{n} g(nx_n) \leq \frac{1}{3} n^2 x_n^3$$

A questo punto, se $x_1 = 1$, per induzione si dimostra che

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

da cui la tesi

(b) Visto che $g(x) \sim \frac{\pi}{2} x$ per $x \rightarrow +\infty$, esiste M tale che

$$g(x) \geq \frac{3}{2} x \quad \forall x \geq M$$

Partendo con $\alpha = M$ si può dimostrare che $x_n \geq M$ per ogni $n \geq 1$

e quindi $x_{n+1} = \frac{1}{n} g(nx_n) \geq \frac{3}{2} x_n$, da cui $x_n \rightarrow +\infty$

Anche qui è opportuno fare per bene l'induzione

$$x_n \geq M \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

Esistono dati positivi con $x_n \rightarrow 0$?

Sì. Per $y \rightarrow 0$,

$$g(y) \sim \frac{y^3}{3}.$$

Quindi possiamo scegliere $\delta > 0$ tale che, per $0 < y < \delta$,

$$2g(y) \leq \frac{y}{2}.$$

Se $0 < \alpha < \delta$, allora $y_1 \in (0, \delta)$ e, per ogni $n \geq 1$,

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) g(y_n) \leq 2g(y_n) \leq \frac{y_n}{2}.$$

Quindi $y_n \rightarrow 0$ e, a maggior ragione,

$$x_n = \frac{y_n}{n} \rightarrow 0.$$

Risultato

Esistono valori $\alpha > 0$ per cui $x_n \rightarrow 0$.

Bonus: comportamento esponenziale

Supponiamo di essere nel caso $y_n \rightarrow +\infty$. Poniamo

$$a = \frac{\pi}{2}, \quad z_n = \frac{y_n}{na^n}.$$

Dalla ricorrenza si ottiene

$$z_{n+1} = z_n \frac{g(y_n)}{ay_n}.$$

Ora

$$\frac{g(y)}{ay} \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow +\infty).$$

Inoltre

$$ay - g(y) = \int_0^y \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(t^2)\right) dt.$$

Inoltre, questa quantità tende a un limite finito, perchè l'integranda è asintotica a $1/t^2$. Ne segue che

$$1 - \frac{g(y_n)}{ay_n} = O\left(\frac{1}{y_n}\right),$$

e questa quantità è sommabile, dato che y_n cresce geometricamente. Il prodotto infinito converge quindi a un numero positivo. Pertanto

$$\frac{y_n}{n(\pi/2)^n} \rightarrow c > 0,$$

e quindi

$$\frac{x_n}{(\pi/2)^n} = \frac{y_n}{n(\pi/2)^n} \rightarrow c > 0.$$

Risultato

Sì : $b = \frac{\pi}{2}$ e, per opportuni $\alpha > 0$, $\frac{x_n}{b^n} \rightarrow c > 0$.

L'idea è sostanzialmente corretta.

Il punto fondamentale è scrivere

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^x \arctan(t^2) dt = \int_0^x \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} x - \int_0^x \arctan\left(\frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{\pi}{2} x - \delta(x)\end{aligned}$$

dove $\delta(x)$ è una funzione LIMITATA (perché $\int_0^{+\infty} \dots$ converge)

A questo punto possiamo

$$z_n = \frac{x_n}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}$$

e osserviamo che $z_{n+1} = z_n - \frac{\delta(n \times x_n)}{n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}$

da cui

$$z_n = z_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta(k \times x_k)}{k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1}}$$

Dal momento che la serie converge ad un numero non troppo grande (il num. $\delta(n \times x_n)$ è limitato da una costante fissa), è chiaro che per z_1 grande il limite sarà positivo.

Ultimate challenge: si può imporre $c = 2026$?

Sì. Il limite c appena costruito dipende dal dato iniziale α . La dipendenza è continua sui dati iniziali che producono fuga a $+\infty$, perchè ogni iterata dipende continuamente da α e il prodotto asintotico sopra converge uniformemente sui sottoinsiemi in cui la fuga è uniforme.

Inoltre:

- ③ • per dati iniziali molto grandi, la fuga è immediata e il coefficiente asintotico c diventa arbitrariamente grande;
- ② • avvicinandosi alla soglia tra i dati che vanno a 0 e quelli che fuggono a $+\infty$, il coefficiente c tende a 0.

Per il teorema dei valori intermedi, il coefficiente c assume tutti i valori positivi. In particolare può assumere il valore 2026.

Risultato

$$\text{Sì: } \exists \alpha > 0 \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\pi/2)^n} = 2026.$$

L'idea è giusta, ma non la dimostrato nulla.

(BLUFFA SPUDORATAMENTE)

Ecco qualche idea per sistemare i dettagli

- ① Basta prendere z_1 abbastanza grande nel p.to precedente per avere che il limite è > 2026 ma non è del tutto ovvio che sia > 0 .
- ② Basta prendere $z_1 = 2026$ per avere che il limite è < 2026 .

③ La continuità del limite rispetto ad α va dimostrata. In realtà vale pure la Lipschitzianità. Consideriamo x_n e \hat{x}_n con dati $x_1 = \alpha < \hat{\alpha} = \hat{x}_1$, e costruiamo z_n e \hat{z}_n come prima.

Allora $\hat{x}_n - x_n \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} (\hat{\alpha} - \alpha)$ [qui si usa che g è $\frac{\pi}{2}$ -lip]

e quindi

$$\hat{z}_\infty - z_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta(k\hat{x}_k) - \delta(kx_k)}{k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(\hat{x}_k - x_k)}{k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1}} \delta'(c_k)$$

↑ *LaGrange* ↑ *compreso tra x_k e \hat{x}_k*

$$\leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 (\hat{\alpha} - \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \delta'(c_k)$$

Questa converge di brutto perché $\delta'(t) \sim \frac{1}{t^2}$ per t grande e c_k cresce esponenzialmente come x_k e \hat{x}_k .

(e) Notiamo g crescente, iniettiva e suriettiva, quindi dato x_n il valore β ed un intero positivo n posso trovare a t.c. $x_n = \beta$ dato che posso investire ogni step e da un numero trovare il suo precedente.

Notiamo che ~~la funzione~~ x_n come funzione di α è crescente perché $\frac{g(n\alpha)}{n}$ è crescente e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n}$ come funzione di α è crescente.

Esistono a t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} \leq 2026$ perché per quanto detto prima

$$\frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} \leq \frac{2\alpha}{\pi} \quad \text{ed esistono a t.c.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} \geq 2026 \quad \text{perché}$$

[sol by 719984]

$$\frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} \geq \frac{2}{\pi} \left(\alpha - \frac{n}{\frac{\pi}{2}-1} \right) + \frac{n}{\frac{\pi}{2}-1} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \rightarrow \frac{2}{\pi} \left(\alpha - \frac{n}{\frac{\pi}{2}-1} \right)$$

Vogliamo mostrare che ~~possiamo~~ prendiamo tutti i valori intermedi.

Notiamo che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} < 2026$ esiste un n t.c.

$\frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} < 2026$ ~~perché~~ x_n in funzione di α è continua quindi aumentando α di una quantità sufficientemente piccola $\frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} < 2026$ rimane vero.

Quindi l'insieme $A = \{ \alpha > 0 \mid x_1 = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} < 2026 \}$ è un intervallo aperto perché

$$\alpha \in A \wedge \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \alpha' \in A \quad \text{e} \quad \alpha \in A \Rightarrow \exists \alpha' > \alpha \wedge \alpha' \in A$$

Si $B = \{ \alpha > 0 \mid x_1 = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} > 2026 \}$ vogliamo mostrare B aperto, cioè

$$\alpha \in B, \alpha' > \alpha \Rightarrow \alpha' \in B \quad (\text{già detto}) \quad (\text{ci rimane}) \quad \alpha \in B \Rightarrow \exists \alpha' < \alpha \wedge \alpha' \in B$$

$$x_{n+1} \geq \frac{\pi}{2} x_n - \frac{n}{n} \Rightarrow \forall m \geq n \quad x_{m+1} \geq \frac{\pi}{2} x_m - \frac{n}{n}$$

$$x_m \geq \left(x_n - \frac{n/n}{\frac{\pi}{2}-1} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{m-n} + \frac{n/n}{\frac{\pi}{2}-1} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x_m}{(\frac{\pi}{2})^m} \geq \left(x_n - \frac{n/n}{\frac{\pi}{2}-1} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-n}$$

$$\text{Dato che } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(\frac{\pi}{2})^n} > 2026; \lim \left(x_n - \frac{n/n}{\frac{\pi}{2}-1} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-n} > 2026; \exists n \left(x_n - \frac{n/n}{\frac{\pi}{2}-1} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-n} > 2026$$

Diminuendo α di poco la diseq rimane vera e $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x_m}{(\frac{\pi}{2})^m} > 2026$.

Abbiamo mostrato B aperto; c'è un punto tra A e B ~~perché~~ dato che B è ~~completamente~~ ^{tutto} a destra di A , infatti $\sup A \notin A$ e se $\sup A \in B$ ~~per~~ $A \cap B \neq \emptyset$ perché B aperto a destra. Quindi per questo $c = 2026$

Esercizio 4 Problema di Cauchy

Consideriamo

$$u'(t) = -u(t) + e^{-t}u(t)^2, \quad u(0) = a.$$

Per $u \neq 0$ poniamo

$$v(t) = \frac{1}{u(t)}.$$

Allora

$$v'(t) = -\frac{u'(t)}{u(t)^2} = -\frac{-u(t) + e^{-t}u(t)^2}{u(t)^2} = \frac{1}{u(t)} - e^{-t} = v(t) - e^{-t}.$$

Quindi

$$v' - v = -e^{-t}.$$

Moltiplicando per e^{-t} ,

$$(e^{-t}v)' = -e^{-2t}.$$

Integrando,

$$e^{-t}v(t) = C + \frac{1}{2}e^{-2t},$$

cioè

$$v(t) = Ce^t + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Poichè $v(0) = 1/a$, per $a \neq 0$ si ha

$$C = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$u(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}}.$$

Per $a = 0$, invece, la soluzione è semplicemente $u(t) \equiv 0$.

Caso $a = 3$

Se $a = 3$, allora

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Dunque

$$u(t) = \frac{1}{-\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}} = \frac{6e^t}{3 - e^{2t}}.$$

Il denominatore si annulla quando

$$3 - e^{2t} = 0,$$

cioè per

$$t = \frac{1}{2} \log 3.$$

Quindi la soluzione esiste nel futuro solo fino a quel tempo, dove ha blow-up. Nel passato, invece, non ci sono singolarità e $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$.

Risultato

$$u(t) = \frac{6e^t}{3 - e^{2t}}, \quad t < \frac{1}{2} \log 3.$$

La soluzione ha blow-up futuro in $T^+ = \frac{1}{2} \log 3$ ed è globale nel passato.

Globalità nel passato e nel futuro

Per $a \neq 0$, la soluzione è globale se e solo se il denominatore

$$D(t) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

non si annulla mai. Moltiplicando per $e^t > 0$, otteniamo la condizione equivalente

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)e^{2t} + \frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2} < 0,$$

allora questa espressione si annulla per un certo t , e si ha blow-up. Se invece

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2} \geq 0,$$

non si annulla mai.

Per $a > 0$ la condizione equivale ad $a \leq 2$. Per $a < 0$ non è mai verificata. Aggiungendo la soluzione nulla, corrispondente ad $a = 0$, otteniamo:

Risultato

La soluzione è globale nel passato e nel futuro se e solo se $a \in [0, 2]$.

Questo è fatto bene. Nulla da aggiungere, se non che sarebbe bello avere il disegno complessivo dell'insieme delle soluzioni

Alternativa alla Bernoulli. Moltiplico per e^t e ottengo

$$e^t u' + e^t u = u^2 \quad \rightsquigarrow \quad (e^t u)' = u^2 \quad \rightsquigarrow \quad (e^t u)' = (e^t u)^2 e^{-2t}$$

Pongo $w = e^t u$ e ottengo $w' = w^2 e^{-2t}$

e risolvo come equazione a variabili separabili!