Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 04 Giugno 2026

1. Calcolare, al variare del parametro reale λ, il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+x^4)-\log(1+x^2+\lambda x^4)}{\sqrt[5]{1+x^6}-\cos(x^3)}.$$

2. Consideriamo la funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=(1+\sin x)^x.$$

   (a) Determinare l'immagine della funzione.

   (b) Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x)=2026$.

   (c) Stabilire se la funzione è uniformemente continua e/o Lipschitziana in $(0,+\infty)$.

3. Consideriamo la funzione

$$g(x)=\int_0^x \arctan(t^2)\,dt$$

   e la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1}=\frac{1}{n}\cdot g(nx_n), \qquad x_1=\alpha.$$

   (a) Determinare la parte principale di $g(x)$ per $x\to 0$ e per $x\to+\infty$.

   (b) Determinare se esistono valori $\alpha\in\mathbb{R}$ per cui $x_n\to+\infty$.

   (c) Determinare se esistono valori $\alpha>0$ per cui $x_n\to 0$.

   (d) (Bonus question) Stabilire se esistono numeri reali $\alpha>0$, $b>1$ e $c>0$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{b^n}=c.$$

   (e) (Ultimate challenge) Stabilire se nel punto precedente possiamo prendere $c=2026$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'(t)=-u(t)+e^{-t}\cdot u(t)^2, \qquad u(0)=a.$$

   (a) Determinare la soluzione del problema nel caso particolare $a=3$, precisando anche se nel futuro si ha esistenza globale, blow up o break down.

   (b) Determinare per quali valori reali di a la soluzione è globale nel passato e nel futuro.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.