

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 21 Febbraio 2026

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^{n^2}}.$$

2. Determinare, al variare del parametro reale λ , il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$3x^3 - 8 = \lambda(9x - 14).$$

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin(x + x^3) + \arctan(x + x^5) + x^2 - 2e^x.$$

- (a) Dimostrare che $x = 0$ è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.
(b) Stabilire se la funzione, vista come $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è iniettiva e/o surgettiva.
(c) Dimostrare che, per ogni numero reale m sufficientemente grande, l'equazione

$$f(x) + m = 0$$

ammette un'unica soluzione reale.

- (d) (Bonus question) Stabilire se esistono valori reali di m per cui l'equazione precedente ammette almeno 2026 soluzioni reali.

4. Consideriamo la funzione

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt.$$

- (a) Dimostrare che $g(x)$ è ben definita per ogni $x > 0$.
(b) Stabilire se $g(x)$ è limitata inferiormente e/o superiormente su tutto $(0, +\infty)$.
(c) Determinare la parte principale di $g(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{2n}{n} \frac{1}{3^n}}_{a_n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{2n}{n} \frac{1}{3^{n^2}}}_{b_n}$$

(a) Essendo $a_n > 0$ possiamo applicare il criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 (n!)^2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 3^n \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \frac{4}{3} > 1 \end{aligned}$$

Quindi la serie **DIVERGE A $+\infty$** .

(b) Essendo $b_n > 0$ possiamo applicare il criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 (n!)^2} \cdot \frac{1}{3^{n^2+2n+1}} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 3^{n^2} \\ &= \underbrace{\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}}_4 \cdot \underbrace{\frac{1}{3^{2n+1}}}_0 \rightarrow 0 < 1 \end{aligned}$$

Quindi la serie **CONVERGE**.

— 0 — 0 —

2. Determinare, al variare del parametro reale λ , il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$3x^3 - 8 = \lambda(9x - 14).$$

Osserviamo che $x = \frac{14}{9}$ non annulla il LHS. Quindi possiamo dividere e ottenere il problema equivalente

$$f(x) = \frac{3x^3 - 8}{9x - 14} = \lambda$$

Studiamo quindi la funzione f , definita per $x \neq \frac{14}{9}$.

Limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

↑
basta
raccolgere x

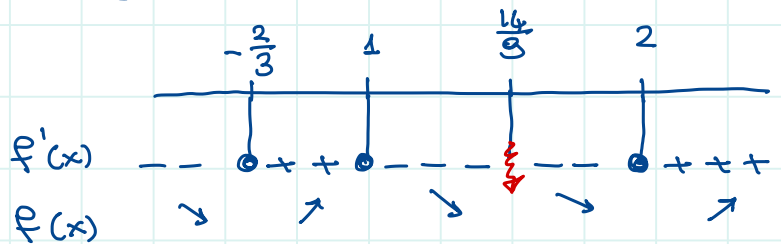
$$\lim_{x \rightarrow \frac{14}{9}^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{14}{9}^+} f(x) = +\infty$$

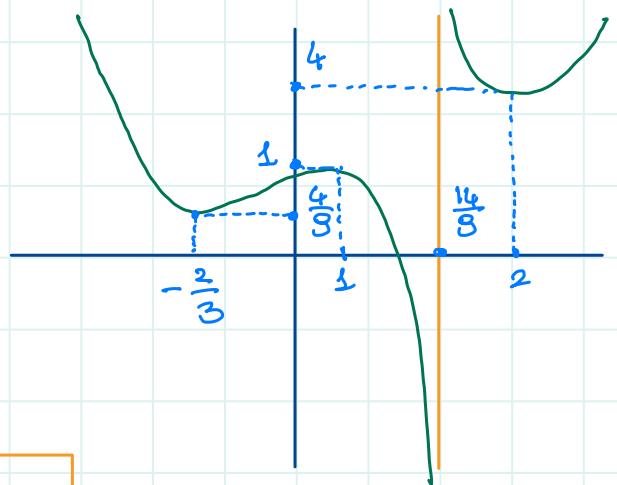
Occorre osservare che $3 \cdot \left(\frac{14}{9}\right)^3 - 8 > 0$

$$f'(x) = \frac{18(3x^3 - 7x^2 + 4)}{(9x - 14)^2} = \frac{18(x-1)(x-2)(3x+2)}{(9x-14)^2}$$

quindi il suo segno è come
nello schema qui accanto



I valori in $-\frac{2}{3}, 1, 2$ si
calcolano facilmente, ottenendo
il grafico qui accanto.



Conclusioni:

- | | |
|--------|---|
| 1 sol. | $\rightsquigarrow \lambda \in (-\infty, \frac{4}{9}) \cup (1, 4)$ |
| 2 sol. | $\rightsquigarrow \lambda \in \{ \frac{4}{9}, 1, 4 \}$ |
| 3 sol. | $\rightsquigarrow \lambda \in (\frac{4}{9}, 1) \cup (4, +\infty)$ |

È istruttivo A POSTERIORI interpretare il risultato in termini di confronto tra i grafici di LHS e RHS originali. È istruttivo anche provare a risolvere l'esercizio studiando la funzione differenza (confrontare i metodi!).

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin(x + x^3) + \arctan(x + x^5) + x^2 - 2e^x.$$

- (a) Dimostrare che $x = 0$ è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.
(b) Stabilire se la funzione, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è iniettiva e/o surgettiva.
(c) Dimostrare che, per ogni numero reale m sufficientemente grande, l'equazione

$$f(x) + m = 0$$

ammette un'unica soluzione reale.

- (d) (Bonus question) Stabilire se esistono valori reali di m per cui l'equazione precedente ammette almeno 2026 soluzioni reali.

(a) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 3 con centro in $x=0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + x^3 - \frac{1}{6} x^3 + x - \frac{1}{3} x^3 + x^2 - 2 - 2x - x^2 - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \\ &= -2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Ne segue che $x=0$ è un **p.to di flesso a tangente orizzontale ascendente.**

(b) Surgettività: **SI** Basta osservare (e giustificare bene mediante raccoglimenti e/o confronti) che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

↑
comanda
l'esponenziale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

↑
comanda x^2

A quel punto si conclude con il teorema dei valori intermedi

Iniettività: **NO** Basta osservare che l'equazione $f(x) = -2$ ha almeno 2 (in realtà almeno 3) soluzioni. Una sol. è $x=0$.

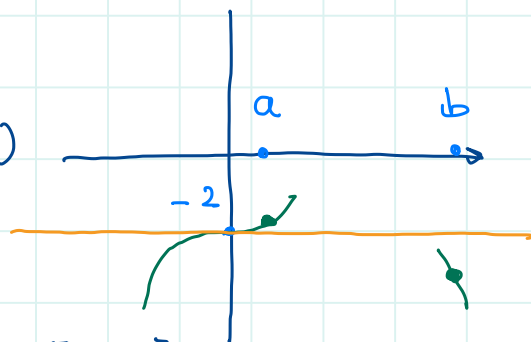
Inoltre

• esiste $a > 0$ t.c. $f(a) > -2$ (per il flesso)

• esiste $b > a$ t.c. $f(b) < -2$ (per il

limite a $+\infty$)

Quindi per il teo. dei valori intermedi in $[a, b]$...



(c) Occorre stabilire due fatti

Fatto 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$, quindi esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) < 0$ per ogni $x \geq A$.

Basta calcolare la derivata e osservare che comanda l'esponenziale.

Fatto 2 Esiste $m_0 := \min \{ f(x) : x \leq A \}$.

Questo segue dal fatto che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e dal teorema di Weierstrass generalizzato (spiegare nei dettagli come si applica).

A questo punto basta prendere $-u < m_0$ per avere soluzione unica. Infatti

→ almeno una sol. esiste per surgettività

→ nessuna soluzione può essere $\leq A$ in quanto $-u < m_0$

→ per $x \geq A$ c'è al più una soluzione per stretta decrescenza.

(d) Esistono (e tutti gli m negativi con $|m|$ abbastanza grande sono ok)

[Brutalmente per x negativo è come se fosse sia $(x+x^3) + x^2$ e le oscillazioni di sin dovute a x^3 battono la crescita di x^2].

Consideriamo l'intervallo $I_n = [-\sqrt{m} - \frac{1}{m^{3/4}}, -\sqrt{m}]$. Quando x varia in questo intervallo

→ le oscillazioni di e^x e $\arctan(\dots)$ tendono a 0 in quanto le due funzioni hanno limite finito

→ l'oscillazione di x^2 è $(-\sqrt{m} + \frac{1}{m^{3/4}})^2 - (\sqrt{m})^2$ e anche questo tende a 0

→ la funzione $x+x^3 =: \varphi(x)$ copre un intervallo di lunghezza

$\varphi(\sqrt{m} + \frac{1}{m^{3/4}}) - \varphi(\sqrt{m})$ e questa $\rightarrow +\infty$ quando $m \rightarrow +\infty$. Ne segue

che per m grandi l'intervallo I_n contiene almeno 10.000 p.ti ai cui cui $\sin(\dots) = 1$ con in mezzo 9999 p.ti bi in cui $\sin(\dots) = -1$.

Ponendo quindi $-u =$ ultimi 3 termini di f calcolati in $-\sqrt{m}$, avremo che

$f(a_i) \sim -m+1$ e $f(b_i) \sim -m-1$, da cui la conclusione per

il te. dei valori intermedi (i \sim vanno trasformati in disug. rigorose).

— o — o —

4. Consideriamo la funzione

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt.$$

- (a) Dimostrare che $g(x)$ è ben definita per ogni $x > 0$.
- (b) Stabilire se $g(x)$ è limitata inferiormente e/o superiormente su tutto $(0, +\infty)$.
- (c) Determinare la parte principale di $g(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.

(a) La funzione $g(x)$ è definita da un integrale improprio con unico problema in 0, il quale converge poiché

$$\frac{\sin \sqrt{t}}{t} \sim \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ per } t \rightarrow 0^+ \quad (\text{l'equivalenza va dimostrata formalmente con il limite})$$

(b) La funzione $g(x)$ è limitata inferiormente e superiormente

Per dimostrarlo occorre osservare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0, \text{ ad esempio perché } 0 \leq g(x) \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq 2\sqrt{x}$$

per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt = l \in \mathbb{R} \text{ in quanto si tratta di un integrale improprio convergente}$$

La convergenza si può dimostrare ad esempio con Dirichlet:

$$\frac{\sin \sqrt{t}}{t} = \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow \text{tende a 0 decrescendo}$$

↳ primitiva $-2 \cos(\sqrt{t})$
limitata

A questo p.to $g(x) \in [-1, 1]$ in un certo intervallo $[0, A]$
 $g(x) \in [l-1, l+1]$ in una semiretta $[B, +\infty)$ con $B > A$
 $g(x)$ ha max/min finiti in $[A, B]$.

(c) $g(x) \sim 2\sqrt{x}$ per $x \rightarrow 0^+$ Per dimostrarlo basta usare de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} \cdot \sqrt{x} = 1.$$

Si può dimostrare che $g(x) = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} dt$, ma il cambio di variabili in un integrale improprio va giustificato.