

# Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 21 Febbraio 2026

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^{n^2}}.$$

2. Determinare, al variare del parametro reale  $\lambda$ , il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$3x^3 - 8 = \lambda(9x - 14).$$

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin(x + x^3) + \arctan(x + x^5) + x^2 - 2e^x.$$

- (a) Dimostrare che  $x = 0$  è un punto stazionario, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.  
(b) Stabilire se la funzione, vista come  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , è iniettiva e/o surgettiva.  
(c) Dimostrare che, per ogni numero reale  $m$  sufficientemente grande, l'equazione

$$f(x) + m = 0$$

ammette un'unica soluzione reale.

- (d) (Bonus question) Stabilire se esistono valori reali di  $m$  per cui l'equazione precedente ammette almeno 2026 soluzioni reali.

4. Consideriamo la funzione

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt.$$

- (a) Dimostrare che  $g(x)$  è ben definita per ogni  $x > 0$ .  
(b) Stabilire se  $g(x)$  è limitata inferiormente e/o superiormente su tutto  $(0, +\infty)$ .  
(c) Determinare la parte principale di  $g(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.