Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 29 Gennaio 2026

1. Studiare, al variare del parametro reale $a > 0$, la convergenza e l'assoluta convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n - \cos(n^2)}{n^a - n}.$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione
$$\left|4x + 5x^2\right| = \lambda(x^2 - 1).$$

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) = 2\cos(x + x^6) + e^{x^2 - x^4}.$$

   (a) Determinare le derivate quinta e sesta della funzione $f(x)$ nel punto $x = 0$.

   (b) Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x)$ con centro in $x = -1$.

   (c) Stabilire se la funzione, vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è iniettiva e/o surgettiva.

   (d) Stabilire se la funzione ammette massimo/minimo su tutto $\mathbb{R}$.

4. Consideriamo l'integrale
$$I(\alpha) := \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha + 3)\sqrt{x}}\, dx.$$

   (a) Determinare per quali numeri reali $\alpha > 0$ l'integrale $I(\alpha)$ è ben definito.

   (b) Calcolare $I(1)$.

   (c) Dimostrare che $I(\alpha) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$.

   (d) (Bonus question) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $I(\alpha)$ per $\alpha \to +\infty$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Studiare, al variare del parametro reale $a > 0$, la convergenza e l'assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \cdot \underbrace{\frac{n-\cos(n^2)}{n^a - n}}_{a_n}.$$

- Se $a < 1$, allora $a_n \to -1$, quindi manca la condizione necessaria e la serie non può convergere.
- Se $a = 1$, l'espressione non è nemmeno ben definita
- Se $a > 2$, allora

$$0 \leq a_n \leq \frac{n+1}{n^a}$$

Ora basta osservare che $\sum a_n$ converge per confronto asintotico con la serie di $\frac{1}{n^{a-1}}$, da cui si deduce che la serie data converge assolutamente.

- Se $1 < a \leq 2$, scriviamo la serie come

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{a-1}-1} - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n^2)}{n^a - n}.$$

La prima converge per Leibniz, la seconda per assoluta convergenza.
In questo range la serie data non converge assolutamente, in quanto

$$a_n \geq \frac{n-1}{n^a+1} \sim \frac{1}{n^{a-1}} \qquad \text{con } 0 < a-1 < 1.$$

Riassumendo, la serie data

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{converge} \iff \alpha > 1 \\ \text{converge assolutamente} \iff \alpha > 2 \end{array}}$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$\left|4x + 5x^2\right| = \lambda(x^2 - 1).$$

Poniamo $g(x) = \dfrac{4x+5x^2}{x^2-1}$, studiamo la funzione e poi cambiamo segno per $x \in (-\frac{4}{5}, 0)$, cioè dove il numeratore è < 0.

Osserviamo che possiamo dividere tranquillamente per x^2-1 poiché $x = \pm 1$ non è mai una soluzione.

La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq \pm 1$, e tende a 5 per $x \to \pm\infty$.
Il suo segno è dato dalla seguente tabella

		-1		$-\frac{4}{5}$		0		1		
	$+ +$		$+$	0	$- -$	0	$+ +$		$+ +$	$4x+5x^2$
	$+ +$	0	$- -$		$- -$		$- -$	0	$+ +$	x^2-1
	$-$	$\nexists$	$-$		$+$		$-$	$\nexists$	$+$	$g(x)$

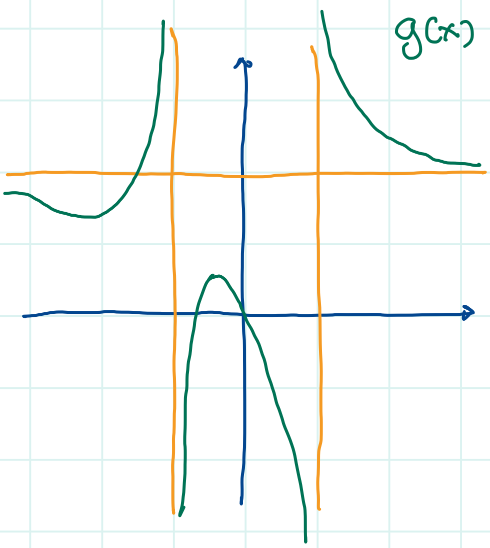
La derivata è

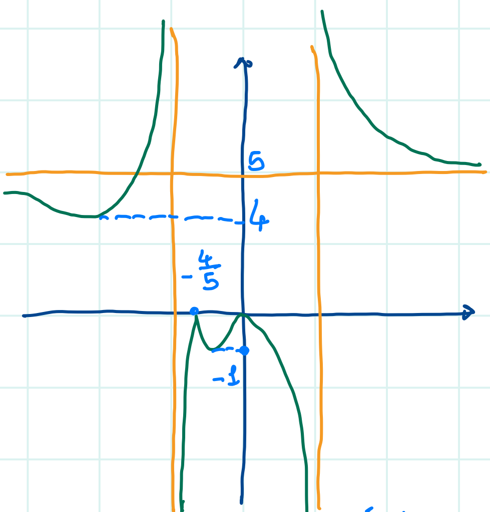
$$g'(x) = \frac{-2(2x^2+5x+2)}{(x^2-1)^2} = -2\,\frac{(x+2)(x+\frac{1}{2})}{(x^2-1)^2}$$

e pertanto il suo segno è dato dalla tabella qui a fianco

		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		1		
	$- -$	0	$+$	$\nexists$	$+ +$	0	$- -$	$\nexists$	$- -$	$g'(x)$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	$g(x)$

Osserviamo infine che
$g(-2) = 4$, $g(-\frac{1}{2}) = 1$, da cui i grafici





vera funzione (dopo aver cambiato segno in $(-\frac{4}{5}, 0)$)

Quindi in conclusione, l'equazione data ha

0 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda \in (0,4)$
1 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda = 4$ e $\lambda = 5$
2 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda \in (-\infty,-1) \cup \{0\} \cup (4,5) \cup (5,+\infty)$
3 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda = -1$
4 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda \in (-1,0)$

Metodo alternativo (molto poco pratico): distinguere i casi a seconda del valore assoluto e trattare l'equazione come un'eq. di secondo grado con parametro, distinguendo ulteriori casi a seconda dei coefficienti e del discriminante.

Verifica utile: provare a posteriori a sovrapporre i grafici di
$|4x+5x^2|$ e $\lambda(x^2-1)$
e vedere che il risultato è coerente con lo studio precedente.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x) = 2\cos(x + x^6) + e^{x^2 - x^4}.$$

(a) Determinare le derivate quinta e sesta della funzione $f(x)$ nel punto $x = 0$.

(b) Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x)$ con centro in $x = -1$.

(c) Stabilire se la funzione, vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è iniettiva e/o surgettiva.

(d) Stabilire se la funzione ammette massimo/minimo su tutto $\mathbb{R}$.

(a) Sviluppo di ordine 6:

$$f(x) = 2\left[1 - \frac{(x+x^6)^2}{2} + \frac{(x+x^6)^4}{24} - \frac{(x+x^6)^6}{720}\right] + 1 + (x^2-x^4) + \frac{(x^2-x^4)^2}{2} + \frac{(x^2-x^4)^3}{6} + o(x^6)$$

$$= 2 - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{360} + 1 + \cancel{x^2} - x^4 + \frac{x^4}{2} - x^6 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$= 3 - \frac{5}{12}x^4 - \frac{301}{360}x^6 + o(x^6) = \dots + \frac{1}{5!}f^{(5)}(0)\cdot x^5 + \frac{1}{6!}f^{(6)}(0)\cdot x^6 + \dots$$

Dallo sviluppo si deduce che $\boxed{f^{(5)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(6)}(0) = -602}$

(b) Poniamo $x = -1 + h$. Allora

$$x + x^6 = (-1+h) + (-1+h)^6 = -1 + h + 1 - 6h + 15h^2 + o(h^2)$$
$$= -5h + 15h^2 + o(h^2)$$

$$x^2 - x^4 = (-1+h)^2 - (-1+h)^4 = 1 - 2h + h^2 - 1 + 4h - 6h^2 + 4h^3$$
$$= 2h - 5h^2 + 4h^3 + o(h^3)$$

e di conseguenza

$$f(-1+h) = 2\left[1 - \frac{1}{2}(-5h + 15h^2 + o(h^2))^2\right]$$
$$+ 1 + (2h - 5h^2 + 4h^3) + \frac{1}{2}(2h - 5h^2)^2 + \frac{1}{6}(2h)^3 + o(h^3)$$

$$= 2 - 25h^2 + 150h^3 + 1 + 2h - 5h^2 + 4h^3 + 2h^2 - 10h^3 + \frac{4}{3}h^3 + o(h^3)$$

$$\boxed{= 3 + 2h - 28h^2 + \frac{436}{3}h^3 + o(h^3)}$$ ← wolfram conferma ☺

(c) $\boxed{\text{La funzione non è né iniettiva, né surgettiva}}$

Non surgettiva: basta osservare che $g(x) \geq -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Non iniettiva: basta osservare che $g(0) = g(-1)$.

(d) $\boxed{\text{Max esiste e min non esiste}}$

Esistenza del max: osserviamo che $\lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2-x^4} = 0$.

Da questo segue che esistono

$A < 0$ e $B > 0$ tali che

$$g(x) \leq \frac{5}{2} \qquad \forall x \in (-\infty, A) \cup (B, +\infty).$$

Essendo $g(0) = 3$, avremo che

$$\max\{g(x) : x \in [A,B]\}$$

è ≥ 3 e coincide con il max su tutto $\mathbb{R}$.

Non esistenza del min. Questo segue da due osservazioni:

→ $g(x) > -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

→ esiste una successione $x_n \to +\infty$ tale che

$$x_n + x_n^6 = (2n+1)\pi$$

e quindi $g(x_n) \to -2$.

Dalle due osservazioni segue che $\inf\{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = -2$, ma non è un minimo.

— □ — ○ — □ —

Alternativa per la non iniettività: dedurla (ma va fatto per bene) dal fatto che $x=0$ è un p.to di max locale, il che a sua volta segue dallo sviluppo del p.to (a).

— ○ — ○ —

4. Consideriamo l'integrale

$$I(\alpha) := \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha + 3)\sqrt{x}}\, dx.$$

(a) Determinare per quali numeri reali $\alpha > 0$ l'integrale $I(\alpha)$ è ben definito.

(b) Calcolare $I(1)$.

(c) Dimostrare che $I(\alpha) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$.

(d) (Bonus question) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $I(\alpha)$ per $\alpha \to +\infty$.

(a) Detta $f(x)$ l'integranda, si verifica che $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}$ per $x \to +\infty$ (fare per bene il limite)
e quindi per confronto asintotico

$$\boxed{I(\alpha) \text{ converge} \iff \alpha > \tfrac{1}{2}}$$

(b) Con il cambio di variabili $x = y^2$, da cui $dx = 2y\,dy$, l'integrale diventa

$$I(1) = \int_1^{+\infty} \frac{2}{y^2+3}\, dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

Occhio: ad essere rigorosi il cambio di variabile andrebbe fatto sull'integrale in $[1, A]$ e poi mandare $A \to +\infty$

(c) Basta osservare che

$$0 \le I(\alpha) \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}$$

da cui $I(\alpha) \to 0$.

(d) Dimostriamo che

$$\boxed{I(\alpha) \sim \frac{1}{3}\log(4)\cdot\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{per } \alpha \to +\infty$$

Con il cambio di variabili $x = e^{y/\alpha}$, da cui $dx = \frac{e^{y/\alpha}}{\alpha}dy$, otteniamo che

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{e^{y/\alpha}}{e^y+3}\,dy$$

Supponendo di poter passare al limite nell'integrale, avremmo quindi che

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^y+3}\,dy = \frac{1}{3}\log 4$$

↑ si calcola facilmente

Come giustificare il passaggio al limite? Si tratta in fondo di dimostrare che

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{y/\alpha}-1}{e^y+3}\,dy = 0.$$

Scriviamo

$$\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^{A} \dots + \int_A^{+\infty} \dots \le \frac{1}{3}A\cdot\left(e^{A/\alpha}-1\right) + \underbrace{\int_A^{+\infty} \frac{e^{y/2}-1}{e^y+3}\,dy}_{\text{qui ho usato } \alpha \ge 2}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo A abbastanza grande in modo che il secondo integrale sia $\le \frac{1}{2}\varepsilon$ (possiamo perché è la coda di un integrale improprio convergente), e poi scegliamo α abbastanza grande in modo che il primo termine sia $\le \frac{1}{2}\varepsilon$.

— o — o —