Università di Pisa – Corso di Laurea in Matematica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 29 Gennaio 2026

1. Studiare, al variare del parametro reale $a > 0$, la convergenza e l'assoluta convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n - \cos(n^2)}{n^a - n}.$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione
$$\left|4x + 5x^2\right| = \lambda(x^2 - 1).$$

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) = 2\cos(x + x^6) + e^{x^2 - x^4}.$$
   (a) Determinare le derivate quinta e sesta della funzione $f(x)$ nel punto $x = 0$.
   (b) Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x)$ con centro in $x = -1$.
   (c) Stabilire se la funzione, vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è iniettiva e/o surgettiva.
   (d) Stabilire se la funzione ammette massimo/minimo su tutto $\mathbb{R}$.

4. Consideriamo l'integrale
$$I(\alpha) := \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha + 3)\sqrt{x}}\, dx.$$
   (a) Determinare per quali numeri reali $\alpha > 0$ l'integrale $I(\alpha)$ è ben definito.
   (b) Calcolare $I(1)$.
   (c) Dimostrare che $I(\alpha) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$.
   (d) (Bonus question) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $I(\alpha)$ per $\alpha \to +\infty$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.