Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 31 Gennaio 2026

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+n^3+1}\right)^{n^\alpha}.$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x^2-1=\lambda\left|4x+5x^2\right|.$$

3. Consideriamo l'integrale

$$I(\alpha):=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^\alpha+3)\sqrt{x}}\,dx.$$

   (a) Calcolare $I(1)$.

   (b) Determinare per quali numeri reali $\alpha>0$ l'integrale $I(\alpha)$ è ben definito.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t)=u(t)^3\cdot\cos t.$$

   (a) Determinare la soluzione che verifica la condizione $u(0)=1$, precisando anche il suo intervallo massimale di esistenza.

   (b) Determinare per quali scelte di $u(0)$ la soluzione ha esistenza globale, sia nel passato, sia nel futuro.

   (c) (Bonus question) Dimostrare che esiste una soluzione globale dell'equazione, la quale ammette massimo M e minimo m positivi su tutto $\mathbb{R}$, e tali che $M=2026m$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Calcolare, al variare del parametro reale α, il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+n^3+1}\right)^{n^\alpha}.$$

Dimostriamo che

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ldots = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<2 \\ e & \text{se } \alpha=2 \\ +\infty & \text{se } \alpha>2 \end{cases}}$$

Per dimostrarlo, scriviamo l'espressione come l'esponenziale di

$$n^\alpha \log\left(1+\frac{n}{n^2+n^3+1}\right)$$

che a sua volta riscriviamo come

$$\underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{n}{\cdots}\right)}{\frac{n}{\cdots}}}_{\to 1} \cdot \boxed{\frac{n^{\alpha+1}}{n^2+n^3+1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<2 \\ 1 & \text{se } \alpha=2 \\ +\infty & \text{se } \alpha>2 \end{cases}$$

(poiché $\frac{n}{\cdots}\to 0$, quindi diventa il solito limite notevole)

— o — o —

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x^2 - 1 = \lambda \left|4x + 5x^2\right|.$$

Riscriviamo l'equazione nella forma $\dfrac{x^2-1}{|4x+5x^2|} = \lambda$
(possiamo perché $x = -\frac{4}{5}$ e $x = 0$,
cioè i valori che annullano il denominatore, non sono mai soluz.)
Ora studiamo la funzione

$$g(x) = \frac{x^2-1}{4x+5x^2}$$

e poi cambiamo il segno per $x \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$.
La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{4}{5}$.
Tende a $\frac{1}{5}$ per $x \to \pm\infty$.
Il suo segno è dato dalla tabella a lato

		-1		$-\frac{4}{5}$		0		1	
	$+\,+$	0	$-$	|	$-\,-$	|	$-\,-$	0	$+\,+$
	$+\,+\,+$		$+$	0	$-\,-$	0	$+\,+$		$+\,+$
$g(x)$	$+$		$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$		$+$

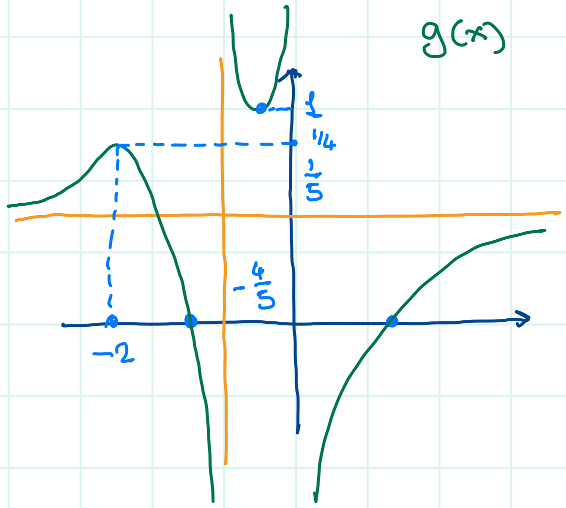
La derivata è

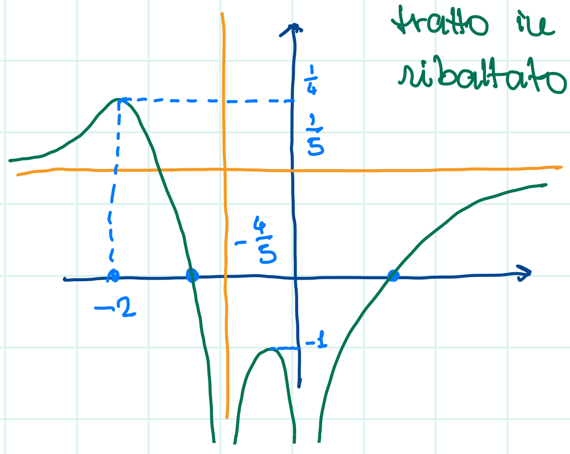
$$g'(x) = \frac{2x(4x+5x^2) - (4+10x)(x^2-1)}{(4x+5x^2)^2} = \frac{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(4x+5x^2)^2}$$

e pertanto il suo segno è dato dalla tabella a lato

		-2		$-\frac{4}{5}$		$-\frac{1}{2}$		0	
$g'(x)$	$+\,+$	0	$-\,-$	|	$-\,-$	|	$+\,+$	0	$+\,+\,+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$		$\nearrow$

Osserviamo infine che
$g(-2) = \frac{1}{4}$ e $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, da cui i grafici qui sotto





vera funzione (con tratto in $\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ ribaltato

Quindi, in conclusione, l'equazione data ha

0 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

1 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda = \frac{1}{5}$ e $\lambda = \frac{1}{4}$

2 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda \in \left(-1, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$

3 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda = -1$

4 sol. $\rightsquigarrow$ $\lambda \in (-\infty, -1)$

Metodo alternativo (molto poco pratico): distinguere i casi a seconda del valore assoluto e trattare l'equazione come un' eq. di secondo grado con parametro, distinguendo ulteriori casi a seconda dei coefficienti e del discriminante.

Verifica utile: provare a posteriori a sovrapporre i grafici di $|4x+5x^2|$ e $\lambda(x^2-1)$ e vedere che il risultato è coerente con lo studio precedente.

—— o —— o ——

3. Consideriamo l'integrale

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha + 3)\sqrt{x}}\, dx.$$

(a) Calcolare $I(1)$.

(b) Determinare per quali numeri reali $\alpha > 0$ l'integrale $I(\alpha)$ è ben definito.

(a) Calcoliamo intanto una primitiva della funzione.
Con la sostituzione $x = y^2$, da cui $dx = 2y\, dy$, si ottiene

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2y}{(y^2+3)y}\, dy = 2\int \frac{dy}{y^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

A questo punto, piuttosto brutalmente, si conclude che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+3)\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$

Più rigorosamente, bisognerebbe calcolare

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{(x+3)\sqrt{x}}\, dx \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x+3)\sqrt{x}}\, dx$$

che comunque si fanno allo stesso modo.

(b) L'integrale ha due problemi, a 0 e all'infinito.
Detta $f(x)$ l'integranda, si verifica che

- $f(x) \sim \frac{1}{3\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$ (fare bene i limiti) e quindi l'integrale con problema in 0 converge sempre.
- $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}$ per $x \to +\infty$ (fare bene i limiti) e quindi l'integrale con problema a $+\infty$ converge se e solo se $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, cioè se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Conclusione: $\boxed{I(\alpha) \text{ è ben definito} \iff \alpha > \frac{1}{2}}$

— o — o —

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t) = u(t)^3 \cdot \cos t.$$

(a) Determinare la soluzione che verifica la condizione $u(0) = 1$, precisando anche il suo intervallo massimale di esistenza.

(b) Determinare per quali scelte di $u(0)$ la soluzione ha esistenza globale, sia nel passato, sia nel futuro.

(c) (Bonus question) Dimostrare che esiste una soluzione globale dell'equazione, la quale ammette massimo M e minimo m positivi su tutto $\mathbb{R}$, e tali che $M = 2026m$.

Si tratta di una equazione a variabili separabili. Seguendo la procedura

$$\frac{du}{u^3} = \cos t \, dt \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = \sin t + c \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{u^2} = c - 2\sin t$$

$$u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{c - 2\sin t}}$$ con il segno da scegliere a seconda del dato iniziale

(a) Imponendo $u(0) = 1$ trovo $c = 1$ e segno $+$, quindi

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin t}}}$$

Imponendo $1 - 2\sin t > 0$ troviamo $\sin t < \frac{1}{2}$, cioè $\boxed{t \in \left(-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)}$ che è l'intervallo massimale di esistenza.

(b) Imponendo $u(0) = \alpha$ trovo $c = \frac{1}{\alpha^2}$ da cui

$$u(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha^2 \sin t}}$$

Osservo, volendo facendo la verifica, che questa formula fornisce la soluzione anche per $\alpha < 0$ e per $\alpha = 0$.
Per avere soluzione globale il denominatore non si deve mai annullare, il che accade se e solo se $2\alpha^2 < 1$, cioè se e solo se $\alpha \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Conclusione: $\boxed{\text{La soluzione è globale} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < u(0) < \frac{1}{\sqrt{2}}}$

(c) Se M e m sono positivi, allora chiaramente $\alpha > 0$. In tal caso

$$M = \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha^2}} \qquad\qquad m = \frac{\alpha}{\sqrt{1+2\alpha^2}}$$

denom. più piccolo possibile

denom. più grande possibile

Imponendo $M = 2026\, m$ troviamo

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha^2}} = \frac{2026\,\alpha}{\sqrt{1+2\alpha^2}}$$

e con semplici calcoli si verifica che questa equazione ha un'unica soluzione α positiva (e minore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

— o — o —