

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1
Pisa, 31 Gennaio 2026

1. Calcolare, al variare del parametro reale α , il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{n^2 + n^3 + 1} \right)^{n^\alpha}.$$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ , il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x^2 - 1 = \lambda |4x + 5x^2|.$$

3. Consideriamo l'integrale

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha + 3)\sqrt{x}} dx.$$

(a) Calcolare $I(1)$.

(b) Determinare per quali numeri reali $\alpha > 0$ l'integrale $I(\alpha)$ è ben definito.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u'(t) = u(t)^3 \cdot \cos t.$$

(a) Determinare la soluzione che verifica la condizione $u(0) = 1$, precisando anche il suo intervallo massimale di esistenza.

(b) Determinare per quali scelte di $u(0)$ la soluzione ha esistenza globale, sia nel passato, sia nel futuro.

(c) (Bonus question) Dimostrare che esiste una soluzione globale dell'equazione, la quale ammette massimo M e minimo m positivi su tutto \mathbb{R} , e tali che $M = 2026m$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.