Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 10 Gennaio 2026

1. Consideriamo, al variare del parametro reale α, la funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - \arctan(x^2 + \alpha x^4 + x^6) + x^4.$$

   (a) Determinare se esistono valori di α per cui la funzione, vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è surgettiva.

   (b) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e stabilire, al variare del parametro α, di che tipo di punto stazionario si tratta.

2. Determinare, al variare del parametro reale λ, quante sono le soluzioni reali dell'equazione

$$x^5 - 1 = \lambda x.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n, \qquad\qquad x_0 = 3.$$

   (a) Determinare il limite della successione.

   (b) Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n}.$$

   (c) (Bonus question) Calcolare il

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{(n!)^2}.$$

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u^{(4)}(t) - 3u^{(3)}(t) + 2u^{(2)}(t) = f(t).$$

   (a) Nel caso in cui $f(t) \equiv 0$ (cioè è la funzione identicamente nulla), trovare la soluzione che verifica le condizioni $u(0) = u'(0) = 0$ e $u''(0) = u'''(0) = 1$.

   (b) Nel caso $f(t) \equiv 1$ (cioè è la funzione costantemente uguale a 1), stabilire se esistono soluzioni che sono surgettive (viste come funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) e nulle per $t = 0$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo, al variare del parametro reale α, la funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - \arctan(x^2 + \alpha x^4 + x^6) + x^4.$$

(a) Determinare se esistono valori di α per cui la funzione, vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è surgettiva.

(b) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e stabilire, al variare del parametro α, di che tipo di punto stazionario si tratta.

(a) Non esistono. Basta osservare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

A quel p.to per Weierstrass generalizzato esiste

$$m := \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

e quindi f non assume valori $< m$.

(b) Sviluppiamo di ordine 6:

$$f(x) = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \cancel{x^2} - \alpha x^4 - x^6 + \frac{1}{3} x^6 + x^4 + o(x^6)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) x^4 - \frac{1}{3} x^6 + o(x^6)$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ manca il termine di grado 1, quindi l'origine è un p.to stazionario.

- Per $\alpha < \frac{1}{2}$ si tratta di min. rel. (x^4 con coeff. > 0)
- Per $\alpha < \frac{1}{2}$ si tratta di max. rel. (x^4 con coeff. < 0)
- Per $\alpha = \frac{1}{2}$ si tratta di max. rel. (comanda $-\frac{1}{3} x^6$).

Quindi

$\alpha < \frac{1}{2} \rightsquigarrow$ p.to min. rel.

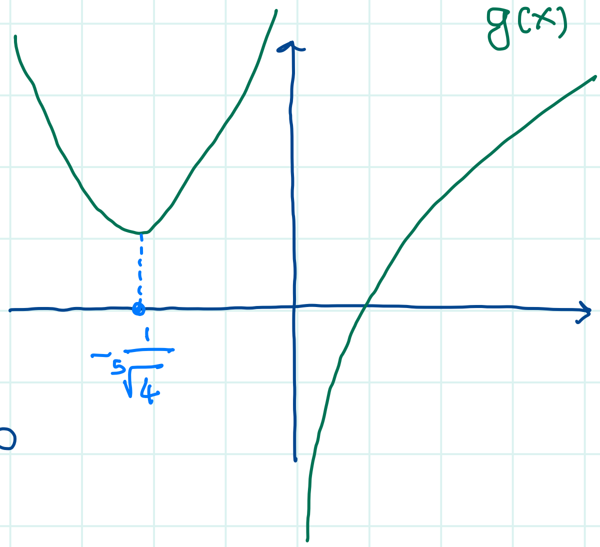
$\alpha \geq \frac{1}{2} \rightsquigarrow$ p.to max. rel.

2. Determinare, al variare del parametro reale λ, quante sono le soluzioni reali dell'equazione

$$x^5 - 1 = \lambda x.$$

Osserviamo che $x=0$ non è mai soluzione, quindi l'eq. data è equivalente a

$$\underbrace{x^4 - \frac{1}{x}}_{g(x)} = \lambda$$



Il grafico di $g(x)$ ha l'andamento qualitativo rappresentato in figura

$$g'(x) = 4x^3 + \frac{1}{x^2} = \frac{4x^5+1}{x^2}$$

		$-\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$		0	
$4x^5+1$	$- - -$	0	$+ +$		$+ + + +$
x^2	$+ + + + +$			0	$+ + + +$
$g'(x)$	$-$		$+$	$\nexists$	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Osserviamo che $g\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{4^4}} + \sqrt[5]{4} = \frac{\sqrt[5]{4}}{4} + \sqrt[5]{4} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{4}$

da cui

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lambda < \frac{5}{4}\sqrt[5]{4} & \rightsquigarrow & 1 \text{ sol.} \\ \lambda = \frac{5}{4}\sqrt[5]{4} & \rightsquigarrow & 2 \text{ sol.} \\ \lambda > \frac{5}{4}\sqrt[5]{4} & \rightsquigarrow & 3 \text{ sol.} \end{array}}$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n, \qquad x_0 = 3.$$

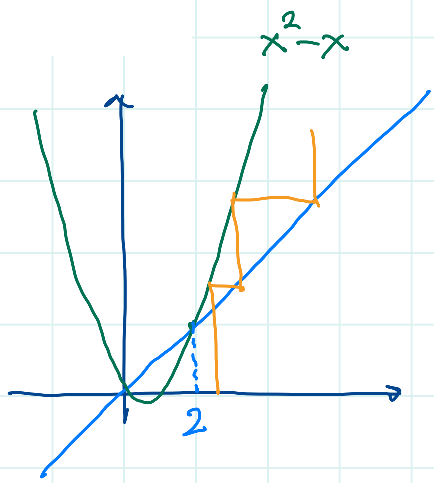
(a) Determinare il limite della successione.

(b) Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n}.$$

(c) (Bonus question) Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{(n!)^2}.$$



Osserviamo che $f(x) = x^2 - x$ soddisfa

$f(x) \geq x \quad \forall\, x \geq 2$

ed è crescente per $x \geq \frac{1}{2}$.

(a) Piano standard con la monotonia

(i) $x_n \geq 3 \quad \forall\, n \geq 0$ (induzione usando la crescenza)

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall\, n \geq 0$ (si riduce a $f(x) \geq x$)

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = +\infty$ (se $\ell \in \mathbb{R}$, allora $\ell = \ell^2 - \ell$, cioè $\ell \in \{0, 2\}$, che non vanno bene con (i)).

(b) Essendo $x_n > 0 \quad \forall\, n \geq 0$ possiamo usare il criterio del rapporto. Posto $a_n = \frac{1}{x_n}$ si trova che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_n}{x_n^2 - x_n} = \frac{1}{x_n - 1} \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{la serie converge}$$

(c) Posto $b_n = \frac{x_n}{(n!)^2}$ si ha $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} =: c_n$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{x_{n+1}^2 - x_{n+1}}{x_{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \to +\infty \Rightarrow c_n \to +\infty$$

$$\Rightarrow b_n \to +\infty$$

— □ — ○ —

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u^{(4)}(t) - 3u^{(3)}(t) + 2u^{(2)}(t) = f(t).$$

(a) Nel caso in cui $f(t) \equiv 0$ (cioè è la funzione identicamente nulla), trovare la soluzione che verifica le condizioni $u(0) = u'(0) = 0$ e $u''(0) = u'''(0) = 1$.

(b) Nel caso $f(t) \equiv 1$ (cioè è la funzione costantemente uguale a 1), stabilire se esistono soluzioni che sono surgettive (viste come funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) e nulle per $t = 0$.

Polinomio caratteristico: $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x-1)(x-2)$

Le radici sono $x=0$ (doppia), $x=1$ e $x=2$

(a) La soluzione generale è $u(t) = a + bt + ce^t + de^{2t}$

le condizioni iniziali diventano

$$\begin{cases} a+c+d = 0 \\ b+c+2d = 0 \\ c+4d = 1 \\ c+8d = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{u(t) = e^t - t - 1}$$

(facile verifica)

(b) La soluzione generale è

$$u(t) = a + bt + ce^t + de^{2t} + \frac{1}{4}t^2$$

(la sol. speciale conviene cercarla del tipo λt^2).

Osserviamo che $\lim_{t\to-\infty} u(t) = +\infty$ per ogni scelta dei parametri.

Dobbiamo quindi imporre

$u(0) = 0 \rightsquigarrow a+c+d = 0$

$\lim_{t\to+\infty} u(t) = -\infty \rightsquigarrow$ basta $d<0$ oppure $d=0$ e $c<0$

Una possibile scelta è $\boxed{u(t) = 1 - e^{2t} + \frac{1}{4}t^2}$

(ma ce ne sono tante altre)

—— o —— o ——