

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1
Pisa, 10 Gennaio 2026

1. Consideriamo, al variare del parametro reale α , la funzione

$$f(x) = \log(1 + x^2) - \arctan(x^2 + \alpha x^4 + x^6) + x^4.$$

- (a) Determinare se esistono valori di α per cui la funzione, vista come $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è surgettiva.
- (b) Dimostrare che l'origine è un punto stazionario e stabilire, al variare del parametro α , di che tipo di punto stazionario si tratta.

2. Determinare, al variare del parametro reale λ , quante sono le soluzioni reali dell'equazione

$$x^5 - 1 = \lambda x.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n, \quad x_0 = 3.$$

- (a) Determinare il limite della successione.
- (b) Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n}.$$

- (c) (Bonus question) Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{(n!)^2}.$$

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u^{(4)}(t) - 3u^{(3)}(t) + 2u^{(2)}(t) = f(t).$$

- (a) Nel caso in cui $f(t) \equiv 0$ (cioè è la funzione identicamente nulla), trovare la soluzione che verifica le condizioni $u(0) = u'(0) = 0$ e $u''(0) = u'''(0) = 1$.
- (b) Nel caso $f(t) \equiv 1$ (cioè è la funzione costantemente uguale a 1), stabilire se esistono soluzioni che sono surgettive (viste come funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R}) e nulle per $t = 0$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.