

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 13 Settembre 2025

1. Consideriamo la successione

$$a_n = n^a \sin\left(\frac{n^2}{n^{20} + 25}\right).$$

- (a) Determinare, al variare del parametro reale a , il limite della successione.
(b) Determinare, al variare del parametro reale a , il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. (a) Risolvere la disequazione

$$x^2 - \log x \geq x,$$

stabilendo anche per quali valori di x vale l'uguaglianza.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale c vale la disuguaglianza

$$x^2 - \log x \geq cx \quad \forall x > 0.$$

(c) (Bonus question) Stabilire per quali valori del parametro reale b vale la disuguaglianza

$$x^2 - \log x \geq x^b \quad \forall x > 0.$$

3. Calcolare i seguenti due integrali:

$$\int_0^{\pi/2} x |\sin(2x)| dx, \quad \int_0^{\pi} x |\sin(2x)| dx.$$

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = f(t).$$

- (a) Nel caso in cui $f(t) \equiv 0$ (cioè è la funzione identicamente nulla), trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali $u(0) = 1$ e $u'(0) = 0$.
(b) Nel caso $f(t) = e^t - e^{-2t}$, trovare la soluzione generale dell'equazione.
(c) Nel caso $f(t) = t$, stabilire se esistono soluzioni che non sono surgettive.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.