Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 13 Settembre 2025

1. Consideriamo la successione
$$a_n = n^a \sin\left(\frac{n^2}{n^{20}+25}\right).$$
   (a) Determinare, al variare del parametro reale a, il limite della successione.
   (b) Determinare, al variare del parametro reale a, il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. (a) Risolvere la disequazione
$$x^2 - \log x \geq x,$$
stabilendo anche per quali valori di x vale l'uguaglianza.
   (b) Determinare per quali valori del parametro reale c vale la disuguaglianza
$$x^2 - \log x \geq cx \qquad \forall x > 0.$$
   (c) (Bonus question) Stabilire per quali valori del parametro reale b vale la disuguaglianza
$$x^2 - \log x \geq x^b \qquad \forall x > 0.$$

3. Calcolare i seguenti due integrali:
$$\int_0^{\pi/2} x|\sin(2x)|\,dx, \qquad \int_0^{\pi} x|\sin(2x)|\,dx.$$

4. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = f(t).$$
   (a) Nel caso in cui $f(t) \equiv 0$ (cioè è la funzione identicamente nulla), trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali $u(0) = 1$ e $u'(0) = 0$.
   (b) Nel caso $f(t) = e^t - e^{-2t}$, trovare la soluzione generale dell'equazione.
   (c) Nel caso $f(t) = t$, stabilire se esistono soluzioni che non sono surgettive.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo la successione

$$a_n = n^a \sin\left(\frac{n^2}{n^{20}+25}\right).$$

(a) Determinare, al variare del parametro reale a, il limite della successione.

(b) Determinare, al variare del parametro reale a, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Brutalmente: $a_n \sim n^a \sin\left(\frac{1}{n^{18}}\right) \sim \frac{1}{n^{18-a}}$, da cui la risposta ad entrambe le domande è immediata.

(a) $$a_n = \underbrace{\boxed{\frac{\sin(\ldots)}{\ldots}}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ y=\ldots \\ +\text{ limite notevole}}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n^2}{n^{20}+25} \cdot n^{18}}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ \text{raccolgo } n^{20} \\ \text{al denominatore}}} \cdot \frac{1}{n^{18-a}}$$

Quindi tutto dipende dal limite dell'ultimo pezzo.

Conclusione

$$\boxed{\begin{array}{l} a < 18 \rightsquigarrow a_n \to 0 \\ a = 18 \rightsquigarrow a_n \to 1 \\ a > 18 \rightsquigarrow a_n \to +\infty \end{array}}$$

(b) Con lo stesso ragionamento del punto (a) scopriamo che la serie si comporta come la serie di $\frac{1}{n^{18-a}}$, che è una armonica generalizzata.

Conclusione

$$\boxed{\begin{array}{l} a < 17 \rightsquigarrow \text{la serie converge} \\ a \geq 17 \rightsquigarrow \text{la serie diverge a } +\infty \end{array}}$$

Occorre anche osservare che $a_n > 0$ definitivamente in quanto l'argomento del seno tende a 0^+.

— o — o —

(a) Risolvere la disequazione

$$x^2 - \log x \geq x,$$

stabilendo anche per quali valori di x vale l'uguaglianza.

(b) Determinare per quali valori del parametro reale c vale la disuguaglianza

$$x^2 - \log x \geq cx \qquad \forall x > 0.$$

(c) (Bonus question) Stabilire per quali valori del parametro reale b vale la disuguaglianza

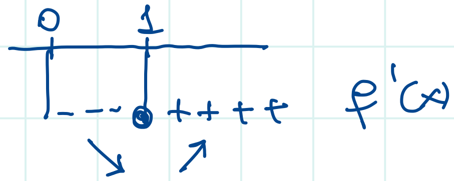
$$x^2 - \log x \geq x^b \qquad \forall x > 0.$$

(a) La soluzione della disequazione è $\boxed{x > 0}$ e vale il segno di uguale $\boxed{\text{se e solo se } x = 1.}$

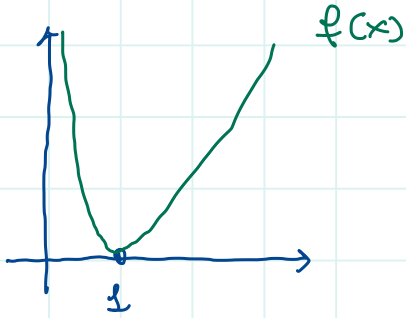
Per dimostrarlo studiamo la funzione $f(x) = x^2 - \log x - x$, definita e derivabile per $x > 0$. Osserviamo che

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$$

Per $x > 0$ il segno di $f'(x)$ dipende da quello di $x - 1$, quindi la situazione è quella descritta nel disegno



Ne segue che $f(x)$ ha un minimo assoluto in $x = 1$, dove vale 0. Quindi $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$ con uguaglianza se e solo se $x = 1$, che è equivalente a quello che volevamo dimostrare



(b) La disuguaglianza vale se e solo se $\boxed{c \leq 1}$.

Per dimostrarlo servono due cose.

→ Per $c > 1$ non vale: per questo basta sostituire $x = 1$

→ Per $c \leq 1$ vale: questo segue dalla catena

$$x^2 - \log x \underset{\text{p.to (a)}}{\geq} x \underset{c \leq 1 \text{ e } x > 0}{\geq} cx \qquad \forall x > 0$$

(c) La disuguaglianza vale se e solo se $\boxed{b = 1}$. Infatti per $b = 1$ è il p.to (a). Per $b \neq 1$ osserviamo che, ponendo $g(x) = x^3 - \log x - x^b$, si ha che $g(1) = 0$ e $g'(1) = 1 - b$, quindi $g(x)$ diventa < 0 a sx o dx di $x = 1$ a seconda del segno di $1 - b$.

Alternativa per (b). Dopo aver osservato che $x>0$, si può riscrivere la disuguaglianza come

$$\varphi(x) = \frac{x^2-\log x}{x} \geq c \qquad \forall x>0$$

il che è equivalente a trovare il minimo di $\varphi(x)$ per $x>0$.
Per far questo occorre studiare il segno di

$$\varphi'(x) = \frac{x^2+\log x-1}{x^2}$$

il quale a sua volta dipende dal segno di $\psi(x) = x^2+\log x-1$, che va studiata a sua volta (e viene abbastanza bene).

Ancora meglio si può osservare che $\varphi(x) \geq 1$ per ogni $x>0$ grazie al p.to (a), con uguaglianza se e solo se $x=1$, il che è sufficiente per dedurre che 1 è davvero il minimo globale di $\varphi(x)$.

— o — o —

3. Calcolare i seguenti due integrali:

$$\int_0^{\pi/2} x|\sin(2x)|\,dx, \qquad \int_0^{\pi} x|\sin(2x)|\,dx.$$

Integrando per parti otteniamo che

$$\int x\sin(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \int \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx$$
$$= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

← Perdere 20 secondi per la verifica

$\boxed{\text{Integrale 1}}$ Osserviamo che $\sin(2x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, in quanto $2x$ varia in $[0, \pi]$.

Quindi il valore assoluto è come se non ci fosse, e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x|\sin(2x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,dx = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$\boxed{\text{Integrale 2}}$ Osserviamo ora che $\sin(2x) \leq 0$ in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, quindi spezzando

$$\int_0^{\pi} \ldots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ldots = \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin(2x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[-\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ldots = \boxed{\pi}$$

— o — o —

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u''(t) - 2u'(t) + u(t) = f(t).$$

(a) Nel caso in cui $f(t) \equiv 0$ (cioè è la funzione identicamente nulla), trovare la soluzione che verifica le condizioni iniziali $u(0) = 1$ e $u'(0) = 0$.

(b) Nel caso $f(t) = e^t - e^{-2t}$, trovare la soluzione generale dell'equazione.

(c) Nel caso $f(t) = t$, stabilire se esistono soluzioni che non sono surgettive.

(a) L'equazione caratteristica è $x^2 - 2x + 1 = 0$, cioè $(x-1)^2 = 0$ da cui $x = 1$ è radice doppia. La soluzione generale è $u(t) = ae^t + bte^t$. Ora $u'(t) = ae^t + be^t + bte^t$, quindi imponendo le condizioni iniziali

$u(0) = 1 \rightsquigarrow a = 1$

$u'(0) = 0 \rightsquigarrow a+b = 0 \rightsquigarrow b = -1$

$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = e^t - te^t}$

(b) Per trovare una soluzione della non omogenea basta fare due tentativi separati del tipo $u(t) = ae^{-2t}$ e $u(t) = at^2e^t$ (la cosa importante è il t^2, in quanto e^t e te^t sono già soluzioni dell'omogenea). Con semplici conti si ottiene

$$\boxed{u(t) = ae^t + bte^t + \frac{1}{2}t^2e^t - \frac{1}{9}e^{-2t}}$$

(c) Provando con un polinomio del tipo $u(t) = at + b$ si ottiene la soluzione generale

$$\boxed{u(t) = ae^t + bte^t + t + 2}$$

Scegliendo ora, per esempio, $a = -1$ e $b = 0$, si ottiene la funzione $u(t) = -e^t + t + 2$. Questa funzione soddisfa

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty$$

e quindi **non può essere surgettiva** (per Weierstrass generalizzato ammette massimo globale su tutto $\mathbb{R}$).

Lo stesso vale, per esempio, se $b < 0$ e a è qualunque.

— o — o —