Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 24 Dicembre 2013

1. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il triangolo con vertici nei punti

$$A = (1,1,0,0), \qquad B = (2,0,3,1), \qquad C = (-1,0,2,-1).$$

   (a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

   (b) Determinare l'area del triangolo.

   (c) Determinare una rappresentazione cartasiana del sottospazio affine di dimensione 2 (in poche parole, il piano) che contiene il triangolo ABC.

2. Consideriamo, nello spazio, la simmetria rispetto al piano di equazione $z = x - 2y$.

   (a) Determinare l'espressione della simmetria.

   (b) Determinare l'immagine del piano $x + y - 3z = 0$,

   (c) Determinare quale isometria dello spazio si ottiene facendo prima tale simmetria e poi la simmetria centrale rispetto al punto $(2,3,0)$.

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \to (x+2)p'(x).$$

   (a) Determinare la dimensione del ker e dell'immagine dell'applicazione.

   (b) Determinare gli autovalori dell'applicazione ed i relativi autospazi.

   (c) Determinare l'intersezione tra l'immagine e l'insieme dei polinomi dispari (cioè quelli tali che $p(-x) = -p(x)$).

4. Consideriamo la matrice $B_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

   (a) Determinare, al variare del parametro a, la segnatura del prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata nella base canonica è B_a.

   (b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare una matrice M tale che $M^t B_0 M$ sia l'identità.

   (c) Determinare, se esistono, i valori di a per cui esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^t B_a M$ sia l'identità.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

SOLUZIONI
BY GIMUSI 23/01/15

1. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il triangolo con vertici nei punti

$$A = (1,1,0,0), \qquad B = (2,0,3,1), \qquad C = (-1,0,2,-1).$$

(a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

(b) Determinare l'area del triangolo.

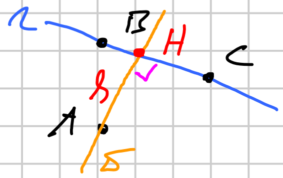
(c) Determinare una rappresentazione cartasiana del sottospazio affine di dimensione 2 (in poche parole, il piano) che contiene il triangolo ABC.

(a) RETTA "BC" r: $B + \delta(B-C) = (2,0,3,1) + \delta(3,0,1,2) =$

$= (2+3\delta, 0, 3+\delta, 1+2\delta)$

MODO 1

IPERPIANO $\pi \perp r$: $3x + z + 2w + d = 0$



PASS. PER $A \rightsquigarrow 3 + d = 0 \quad d = -3$

$3x + z + 2w - 3 = 0$

$H = \pi \cap r$: $3(2+3\delta) + 3 + \delta + 2(1+2\delta) - 3 =$

$= 6 + 9\delta + 3 + \delta + 2 + 4\delta - 3 =$

$= 14\delta + 8 = 0 \rightsquigarrow \delta = -4/7$

$$H = \left(2 - \frac{12}{7}, 0, 3 - \frac{4}{7}, 1 - \frac{8}{7}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{7}, 0, \frac{17}{7}, \frac{-1}{7}\right)$$

ALTEZZA $h = \|A - H\|$: $A - H = \left(1 - \frac{2}{7}, 1 - 0, -\frac{17}{7}, \frac{1}{7}\right) =$

$$= \left(\frac{5}{7}, 1, -\frac{17}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

$$h = \left(\frac{25}{49} + 1 + \frac{289}{49} + \frac{1}{49}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{25 + 49 + 289 + 1}{49}\right)^{1/2} = \left(\frac{364}{49}\right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{91}}{7}$$

MODO 2

DISTANZA PER PUNTO A: $(P - A) = (1+3\delta, -1, 3+\delta, 1+2\delta)$

$$\text{DIST.}^2 = \|P - A\|^2 = (1+3\delta)^2 + (-1)^2 + (3+\delta)^2 + (1+2\delta)^2$$

$$\frac{d\|P-A\|^2}{d\sigma} = 6(1+3\sigma)+2(3+\sigma)+4(1+2\sigma) = 6+18\sigma+6+2\sigma+4+8\sigma = 0$$

$$\rightsquigarrow 28\sigma = -16 \qquad \sigma = -4/7$$

$$H = \left(\frac{2}{7}, 0, \frac{17}{7}, \frac{-1}{7}\right)$$

$$\text{DIST.}^2 = \left(1-\frac{12}{7}\right)^2 + 1 + (3-4/7)^2 + (1-8/7)^2 = \frac{25+49+289+1}{49} =$$

$$= \frac{364}{49} \rightsquigarrow \rho = \frac{2\sqrt{91}}{7}$$

(b) $B-C = (3,0,1,2) \qquad |B-C| = (9+1+4)^{1/2} = \sqrt{14}$

$$\text{AREA} = \frac{1}{2}|B-C|\cdot\rho = \frac{1}{2}\sqrt{14}\,\frac{2}{7}\sqrt{91} = \frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{91}}{7} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\cdot 7\cdot 7\cdot 13}}{7} = \sqrt{26}$$

(c) PIANO CONTENENTE $A\hat{B}C$ π: $B + s(B-C) + \sigma(B-A) =$

$$= (2,0,3,1) + s(3,0,1,2) + \sigma(1,-1,3,1)$$

$$\begin{cases} x = 2+3s+\sigma \\ y = -\sigma \\ z = 3+s+3\sigma \\ w = 1+2s+\sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma = -y \\ s = z-3+3y \\ x = 2+3z-9+9y-y \\ w = 1+2z-6+6y-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-8y-3z+7=0 \\ 5y+2z-w-5=0 \end{cases}$$

2. Consideriamo, nello spazio, la simmetria rispetto al piano di equazione $z = x - 2y$.

(a) Determinare l'espressione della simmetria.

(b) Determinare l'immagine del piano $x + y - 3z = 0$,

(c) Determinare quale isometria dello spazio si ottiene facendo prima tale simmetria e poi la simmetria centrale rispetto al punto $(2, 3, 0)$.

(a) $\delta: \ z = x - 2y \qquad x - 2y - z = 0$

$$\begin{cases} v_1 \in \delta & v_1 = (2, 1, 0) \\ v_2 \in \delta & v_2 = (1, 0, 1) \\ v_3 \perp \delta & v_3 = (1, -2, -1) \end{cases}$$

MATRICE DELLA SIMMETRIA RISPETTO A δ NELLA BASE $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NELLA BASE CANONICA:

$$\underset{v \to e}{\overset{M}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}} \underset{v \to v}{\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}} \underset{e \to v}{\overset{M^{-1}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}}$$

$\det(M) = 0 + 0 + 1 - 0 + 4 + 1 = 6$

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & +1 & 1 \\ +2 & -2 & -2 \\ -2 & +5 & -1 \end{pmatrix}^{\delta} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto S = MAM^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

VER. $Sv_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$

$$Sv_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

$$Sv_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_3$$

(b) PIANO $\hat\sigma : x+y-3z=0$ $\quad \hat n \perp \hat\sigma : \hat n = (1,1,-3)$

$$S\hat n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ -15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow n^* = (1,7,-7)$$

$\hat P \in \hat\sigma \quad : \quad \hat P = (1,-1,0)$ [NON SERVE IN QUESTO CASO]

$$S\hat P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PIANO IMMAGINE σ^*: $x+7y-7z+d=0$

$P^* \in \sigma^* \rightsquigarrow 7-7+d=0 \quad d=0$

$\rightsquigarrow x+7y-7z=0$

OSS. σ E $\hat\sigma$ PASSANO PER L'ORIGINE $\rightsquigarrow$ NECESS. $d=0$

(c) ISOMETRIA COMPOSTA:

SIMMETRIA RISPETTO π: $P' = SP$

SIMMETRIA CENTRALE RISPETTO AD A:

$$A = \frac{P'+P''}{2} \rightsquigarrow P'' = 2A - P'$$

COMPOSIZIONE: $P'' = 2A - SP$

CLASSIFICAZIONE MEDIANTE PUNTI FISSI:

P.TO FISSO $2A - SP = P \rightsquigarrow SP + P = 2A$

$$\rightsquigarrow (S+I)P = 2A \quad (S+I) = \begin{pmatrix} 2/3+1 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3+1 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

OSS: $R_3 = R_1 - 2R_2$

$$DET(S+I) = \frac{1}{27}(50 - 5 - 5 - 2 - 20 - 20) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -2 & 18 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ NESSUN PUNTO FISSO

3 POSSIBILITÀ
- TRASLAZIONE $\rightsquigarrow$ DA ESCLUDERE $-S \neq I$
- SIMM. RISP. AD UN PIANO + TRASL. LUNGO IL PIANO
- ROTAZ. INTORNO A RETTA + TRASL. LUNGO RETTA

COMPOSIZIONE: $P'' = 2A - SP$

"$-SP$" FA LA SIMMETRIA RISPETTO AL PIANO $\Delta: x-2y-z=0$

$\oplus$ LA SIMMETRIA CENTRALE RISPETTO ALL'ORIGINE

$$P_1 = SP_0 \qquad \frac{P_2+P_1}{2} = 0 \qquad \rightsquigarrow P_2 = -SP_0$$

$\Rightarrow$ "$-SP$" REALIZZA UNA ROTAZIONE DI 180° RISPETTO ALLA RETTA $\perp$ AL PIANO PASSANTE PER L'ORIGINE

INFATTI:

$$-SV_1 = -V_1 \qquad -SV_2 = -V_2 \qquad -SV_3 = V_3$$

CONSIDERIAMO LE COMPONENTI DELLA PARTE TRASLATORIA "$2A = 2A_\perp + 2A_\parallel$":

$$\begin{cases} 2A_\perp \rightsquigarrow \perp \text{ AL VETTORE } V_3 \\ 2A_\parallel \rightsquigarrow \parallel \text{ AL VETTORE } V_3 \end{cases}$$

$$2A_\perp = 2A - \frac{\langle 2A, V_3\rangle}{\langle V_3, V_3\rangle} V_3 = (5,6,0) - \frac{-8}{6}(1,-2,-1) =$$

$$= (5+5/3,\ 6-8/3,\ 0-5/3) = (16/3,\ 10/3,\ -5/3)$$

$$2A_\parallel = (-5/3,\ 8/3,\ 5/3)$$

POSSIAMO RISCRIVERE L'ISOMETRIA COME:

$$P'' = -SP + 2A_\perp + 2A_\parallel$$

CONSIDERIAMO IL TERMINE: $-SP + 2A_\perp$

$\rightsquigarrow$ I PUNTI DELLA RETTA $Q = \delta V_3 + A_\perp$ VANNO IN SE STESSI

$$\begin{cases} -SQ + 2A_\perp = -S(\delta V_3 + A_\perp) + 2A_\perp = -\delta S V_3 - SA_\perp + 2A_\perp = \\ = \delta V_3 - A_\perp + 2A_\perp = \delta V_3 + A_\perp = Q \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ L'ISOMETRIA $P'' = 2A - SP$ RAPPRESENTA UNA ROTAZIONE DI 180° INTORNO ALLA RETTA $\delta V_3 + A_\perp$

$\oplus$ TRASLAZIONE LUNGO LA RETTA $2A_\parallel$

3. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3. Consideriamo l'applicazione lineare da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ in $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$p(x) \to (x+2)p'(x).$$

(a) Determinare la dimensione del ker e dell'immagine dell'applicazione.

(b) Determinare gli autovalori dell'applicazione ed i relativi autospazi.

(c) Determinare l'intersezione tra l'immagine e l'insieme dei polinomi dispari (cioè quelli tali che $p(-x) = -p(x)$).

(a) BASE: $\{1, x, x^2, x^3\}$

$$\begin{cases} 1 \rightsquigarrow (x+2)\cdot 0 = 0 & = (0,0,0,0) \\ x \rightsquigarrow (x+2)\cdot 1 = x+2 & = (2,1,0,0) \\ x^2 \rightsquigarrow (x+2)\cdot 2x = 2x^2+4x & = (0,4,2,0) \\ x^3 \rightsquigarrow (x+2)\cdot 3x^2 = 3x^3+6x^2 & = (0,0,6,3) \end{cases} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{RANGO}(A) = 3 \rightsquigarrow \dim(\ker f) = 4 - 3 = 1 \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 3$

(b) A TRIANGOLARE $\rightsquigarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2 \quad \lambda_4 = 3$

$$\lambda_1 = 0 \rightsquigarrow Ax = 0 \qquad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = 3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \qquad x_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $p(-x) = a - bx + cx^2 - dx^3 = -a - bx - cx^2 - dx^3 \rightsquigarrow a = c = 0$

$$\begin{cases} \text{POLINOMI DISPARI: } bx + dx^3 = \text{SPAN}\{\overset{w_1}{x}, \overset{w_2}{x^3}\} \\ \text{IM}(f) = \text{SPAN}\{\overset{v_1}{2+x}, \overset{v_2}{5x+2x^2}, \overset{v_3}{6x^2+3x^3}\} \end{cases}$$

INTERSEZIONE: $a v_1 + b v_2 + c v_3 = d w_1 + e w_3$

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 - d w_1 - e w_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -d \\ -e \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = d/5 \\ c = -d/12 \\ d = -5e \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3\delta \\ c = \delta \\ e = 3\delta \quad d = -12\delta \end{cases} \rightsquigarrow -3v_2 + v_3 = -12 w_1 + 3 w_2$$

VER. $-3v_2 + v_3 = -3(5x + 2x^2) + 6x^2 + 3x^3 = -12x + 3x^3 = -12 w_1 + 3 w_2$

$\rightsquigarrow -12x + 3x^3 \quad (\text{DIM} = 1)$

4. Consideriamo la matrice $B_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

(a) Determinare, al variare del parametro a, la segnatura del prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata nella base canonica è B_a.

(b) Nel caso particolare $a = 0$, determinare una matrice M tale che $M^t B_0 M$ sia l'identità.

(c) Determinare, se esistono, i valori di a per cui esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^t B_a M$ sia l'identità.

(a) MODO 1 – COMPLETAMENTO DEI QUADRATI

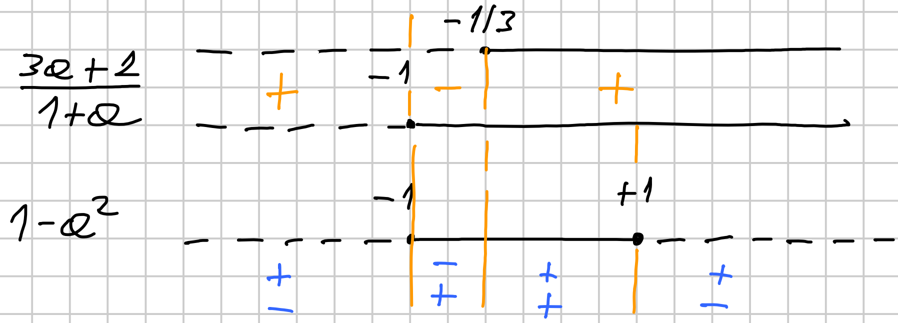
$$x^2+y^2+3z^2+2axy+2xz+2yz =$$

$$= (x+ay+z)^2+(1-a^2)y^2+2z^2+2yz-2ayz =$$

$$= (x+ay+z)^2+(1-a^2)y^2+(2-2a)yz+2z^2 =$$

$$= (x+ay+z)^2+(1-a^2)\left[y+\frac{1-a}{1-a^2}z\right]^2+2z^2-\frac{(1-a)^{\cancel{2}}}{\cancel{1-a^2}\,(1+a)}z^2 =$$

$$= (x+ay+z)^2+(1-a^2)\left[y+\frac{1-a}{1-a^2}z\right]^2+\left(\frac{3a+1}{1+a}\right)z^2$$



CASI PARTICOLARI

$a=1$ $\quad x^2+y^2+3z^2+2xy+2xz+2yz =$

$$= (x+y+z)^2+2z^2$$

$a=-1$ $\quad x^2+y^2+3z^2-2xy+2xz+2yz =$

$$= (x-y+z)^2+2z^2+4yz =$$

$$= (x-y+z)^2+2(y+z)^2-2y^2$$

$a=-1/3$ $\quad (x-y/3+z)^2+(8/9)\left[y+\tfrac{3}{2}z\right]^2$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \text{DEFINITA POSITIVA} & -1/3 < a < 1 \\ \text{SEMIDEF. POSITIVA} & a = -1/3 \quad a = 1 \\ \text{INDEFINITA} & a < -1/3 \ \text{ E } \ a > 1 \end{cases}$$

(a) MODO 2 - SYLVESTER

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{DET}(3) = 3 \\ \text{DET}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \\ \text{DET}(B_a) = 3 + a + a - 1 - 1 - 3a^2 = -3a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -1/3 \end{cases}$$

$$- \quad -1/3 \quad + \quad 1 \quad -$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \text{DEFINITA POSITIVA} & -1/3 < a < 1 \\ \text{SEMIDEF. POSITIVA} & a = -1/3 \quad a = 1 \\ \text{INDEFINITA} & a < -1/3 \ \text{ E } \ a > 1 \end{cases}$$

(b)

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ASSOCIATA AD UN PRODOTTO SCALARE DEFINITO POSITIVO } (B_0 = B_0^{\delta})$$

SIANO $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

BASE ORTONORMALE RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE

$$W_1 = V_1 \qquad W_2 = V_2 - \frac{\langle V_2, V_1 \rangle}{\langle V_1, V_1 \rangle} V_1 \qquad W_3 = V_3 - \frac{\langle V_3, V_1 \rangle}{\langle V_1, V_1 \rangle} V_1 - \frac{\langle V_3, W_2 \rangle}{\langle W_2, W_2 \rangle} W_2$$

$$\langle V_1, V_1 \rangle = (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad \langle V_2, V_1 \rangle = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow W_2 = V_2$$

$$\langle V_3, V_1 \rangle = (1\ 1\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad \langle V_3, W_2 \rangle = (1\ 1\ 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle W_2, W_2 \rangle = (0, 1, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad W_3 = V_3 - V_1 - W_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle W_3, W_3 \rangle = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\rightsquigarrow W_1^* = \frac{W_1}{\|W_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad W_2^* = \frac{W_2}{\|W_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad W_3^* = \frac{W_3}{\|W_3\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{\delta} B_0 M = I$$

(c) x TEOREMA SPETTRALE $\exists M$ ORTOGONALE SE E SOLO SE $B_a \; (=B_a^T)$ AMMETTE AUTOVALORI $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ CON $MG=3$

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |B_a - I| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 + a + a - 2a^2 = \\ = 2a(1-a) = 0 \\ \rightsquigarrow a=0 \quad a=1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow a=0 \quad B_0 - I = \overset{MG=1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad a=1 \quad B_1 - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overset{MG=1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ NON ESISTE M ORTOGONALE t.c. $M^T B_a M = I$

VERIFICA

$$|B_a - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ a & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + a + a - (1-\lambda) - (1-\lambda) - a^2(3-\lambda) =$$

$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(3-\lambda) + 2a - 2 + 2\lambda - 3a^2 + a^2\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - 6\lambda - \lambda + 3 + 2a - 2 + 2\lambda - 3a^2 + a^2\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + (a^2-5)\lambda + (1+2a-3a^2) = 0$$

$$\lambda = 1 \rightsquigarrow \cancel{-1} + \cancel{5} + a^2 \cancel{-5} \cancel{+1} + 2a - 3a^2 = 0$$

$$\rightsquigarrow 2a - 2a^2 = 0 \quad 2a(1-a) = 0 \quad \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$a=0 \rightsquigarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 5\lambda(\lambda-1) - (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) =$$

$$= (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-1) = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$a=1 \rightsquigarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$