

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 19 Luglio 2025

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + \sin x + 3x^2) - \arctan x}{\log(1 + \sin(x^2) + 3x) - 3 \sin x}.$$

- (a) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.
- (b) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

2. (a) Determinare il più piccolo numero reale k tale che

$$4\sqrt{x} + 7 \leq k \cdot e^x \quad \forall x \geq 0.$$

(b) Determinare il più piccolo numero reale k tale che

$$4\sqrt{n} + 7 \leq k \cdot e^n$$

per ogni intero $n \geq 0$.

3. (a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx.$$

(b) Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente/divergente/indeterminato:

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) \, dx.$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u^2 - 3}{u + 1}, \quad u(0) = \alpha.$$

- (a) Studiare qualitativamente la soluzione (con particolare riferimento all'eventuale esistenza globale nel futuro/passato, al comportamento asintotico e alle proprietà di monotonia/convessità) nel caso $\alpha = 2025$.
- (b) Studiare qualitativamente la soluzione nel caso $\alpha = 0$.
- (c) (Bonus question) Tornando al caso $\alpha = 2025$, calcolare

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log(u(t)^4 - 9)}{t}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + \sin x + 3x^2) - \arctan x}{\log(1 + \sin(x^2) + 3x) - 3 \sin x}.$$

(a) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.

(b) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

(a) Taylor di ordine 2 sopra e sotto

$$\begin{aligned}\text{Num} &= \log(1 + x + 3x^2 + o(x^2)) - x + o(x^2) \\ &= x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x + o(x^2) \\ &= \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Den} &= \log(1 + \sin(x^2) + 3x) - 3 \sin x \\ &= \log(1 + 3x + x^2 + o(x^2)) - 3x + o(x^2) \\ &= 3x + x^2 - \frac{9}{2}x^2 - 3x + o(x^2) \\ &= -\frac{7}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Quindi $\frac{\text{Num}}{\text{Den}} = \frac{\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{7}{2}x^2 + o(x^2)} \rightarrow \boxed{-\frac{5}{7}}$

(b) Brutalmente $\text{Num} \sim \log(3x^2) = 2\log x + \log 3$
 $\text{Den} \sim \log(3x) = \log x + \log 3$

Quindi $\frac{\text{Num}}{\text{Den}} \rightarrow \boxed{2}$

Rigorosamente: basta raccogliere x^2 e x dentro ai logaritmi

$$\begin{aligned}\text{Num} &= \log\left[x^2 \cdot \left(3 + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)\right] - \arctan x \\ &= \log x + \log(3 + \dots) - \arctan x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Den} &= \log\left[x \cdot \left(3 + \frac{\sin x^2}{x} + \frac{1}{x}\right)\right] - 3 \sin x \\ &= \log x + \log(3 + \dots) - 3 \sin x\end{aligned}$$

A questo p.to basta raccogliere $\log x$ sopra e sotto.
— 0 — 0 —

2. (a) Determinare il più piccolo numero reale k tale che

$$4\sqrt{x} + 7 \leq k \cdot e^x \quad \forall x \geq 0.$$

(b) Determinare il più piccolo numero reale k tale che

$$4\sqrt{n} + 7 \leq k \cdot e^n$$

per ogni intero $n \geq 0$.

Poiché $e^x > 0$ sempre, posso dividere per e^x . Così ci si riduce a determinare il massimo di

$$f(x) = (4\sqrt{x} + 7)e^{-x} \quad \text{per } x \geq 0.$$

La funzione è sempre positiva, tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$, e

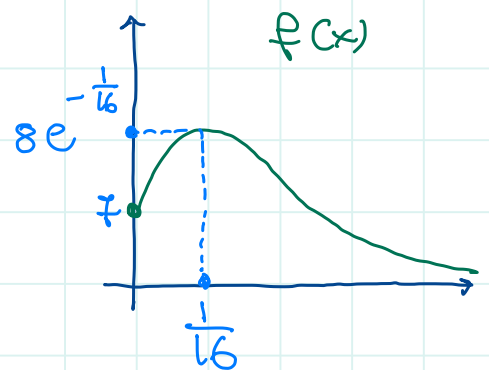
$$f'(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} - 7 \right) e^{-x}$$

Il segno dipende da $2 - 4x - 7\sqrt{x}$, che ponendo $t = \sqrt{x}$ diventa $-4t^2 - 7t + 2$. Le radici sono

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-8} = \begin{matrix} \nearrow -2 \leadsto \text{nessun } x \\ \searrow \frac{1}{4} \leadsto x = \frac{1}{16} \end{matrix}$$

Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se

$$-2 < \sqrt{x} < \frac{1}{4}, \quad \text{cioè se e solo se} \\ 0 < x < \frac{1}{16}.$$



Quindi $f(x)$ ha max per $x = \frac{1}{16}$ e poi decresce verso 0.

(a) Il miglior k è il max di $f(x)$, e cioè

$$8e^{-\frac{1}{16}}$$

(b) Poiché in particolare f decresce da $\frac{1}{16}$ in poi, per il miglior k se la giochiamo $f(0) = 7$ e $f(1) = \frac{11}{e} < \frac{11}{2} < 7$,

per cui il miglior k è 7

— 0 — 0 —

3. (a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx.$$

(b) Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente/divergente/indeterminato:

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) dx.$$

Determiniamo una primitiva

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ x=y^2 \\ dx=2y dy}}{=} \int \cos(y) \cdot 2y dy \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{per parti}}}{=}$$

$$= 2y \sin y - \int 2 \sin y = 2y \sin y + 2 \cos y = \boxed{2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x})}$$

VERIFICA!

$$\begin{aligned} (a) \quad \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx &= \left[2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) \right]_0^{\pi^2} \\ &= 2\pi \sin \pi + 2 \cos \pi - 2 \cos(0) \\ &= -2 - 2 = \boxed{-4} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos(\sqrt{x}) dx$$

sostituisco nella primitiva $\rightarrow$ $= \lim_{A \rightarrow +\infty} (2\sqrt{A} \sin \sqrt{A} + 2 \cos \sqrt{A} - 2)$

Dico che il limite non esiste e dunque l'integrale improprio è indeterminato

Per dimostrare la non esistenza, basta considerare la succ.

$$\rightarrow A_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2, \text{ su cui tende a } +\infty$$

$$\rightarrow A_k = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2, \text{ su cui tende a } +\infty$$

— ○ — ○ —

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u^2 - 3}{u + 1}, \quad u(0) = \alpha.$$

- (a) Studiare qualitativamente la soluzione (con particolare riferimento all'eventuale esistenza globale nel futuro/passato, al comportamento asintotico e alle proprietà di monotonia/convessità) nel caso $\alpha = 2025$.
- (b) Studiare qualitativamente la soluzione nel caso $\alpha = 0$.
- (c) (Bonus question) Tornando al caso $\alpha = 2025$, calcolare

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log(u(t)^4 - 9)}{t}.$$

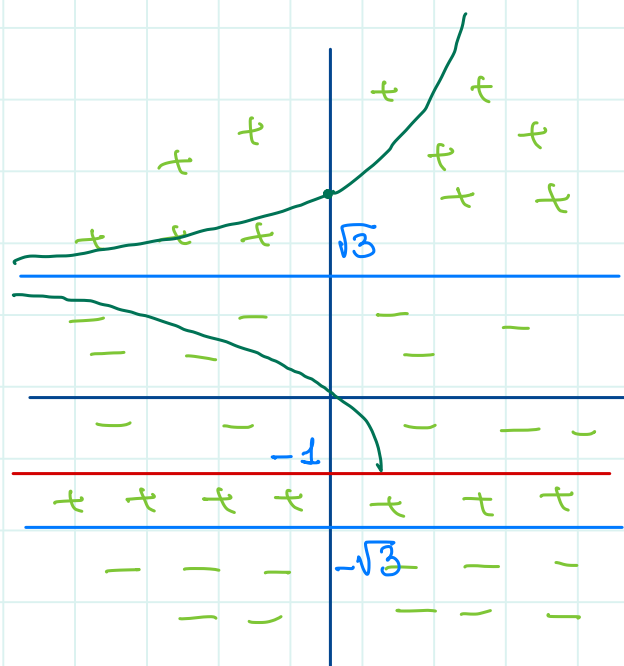
Il segno di u' è rappresentato dai + e - in figura. Osserviamo anche che

$$u'' = \frac{2u(u+1) - u^2 + 3}{(u+1)^2} \cdot u'$$

$$= \boxed{\frac{u^2 + 2u + 3}{(u+1)^2}} \cdot \frac{u^2 - 3}{u+1}$$

> 0 se $u \neq -1$

per cui il segno di u'' coincide con quello di u' .



- (a) Per $\alpha > \sqrt{3}$, e quindi anche per $\alpha = 2025$, la soluzione è crescente e convessa. È definita globalmente sia nel passato (non può attraversare $\sqrt{3}$) sia nel futuro (per confronto in quanto $\frac{u^2 - 3}{u + 1} \leq u$ per $u \geq \sqrt{3}$).

Inoltre dal teorema dell'asintoto segue che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \sqrt{3}$$

- (b) Per $\alpha \in (-1, \sqrt{3})$, e quindi anche per $\alpha = 0$, la soluzione è decrescente e concava. È definita globalmente nel passato (non può attraversare $\sqrt{3}$), e ha BREAK DOWN nel futuro (se esistesse globalmente avrebbe limite finito, ma gli unici possibili limiti finiti sono $\pm \sqrt{3}, \dots$)

(Bonus) Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, quindi si può applicare de L'Hôpital

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log(u^4(t) - 9)}{t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{4u(t)^3 u'(t)}{u(t)^4 - 9}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} 4u^3(t) \frac{u(t)^2 - 3}{u(t) + 1} \frac{1}{u(t)^4 - 9}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{4u^3(t)}{(u(t) + 1) \cdot (u(t)^2 + 3)} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 1)}}$$

— o — o —