

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica  
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1  
Pisa, 19 Luglio 2025

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + \sin x + 3x^2) - \arctan x}{\log(1 + \sin(x^2) + 3x) - 3 \sin x}.$$

- (a) Determinare il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow 0$ .
- (b) Determinare il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

2. (a) Determinare il più piccolo numero reale  $k$  tale che

$$4\sqrt{x} + 7 \leq k \cdot e^x \quad \forall x \geq 0.$$

(b) Determinare il più piccolo numero reale  $k$  tale che

$$4\sqrt{n} + 7 \leq k \cdot e^n$$

per ogni intero  $n \geq 0$ .

3. (a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx.$$

(b) Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente/divergente/indeterminato:

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) \, dx.$$

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u^2 - 3}{u + 1}, \quad u(0) = \alpha.$$

- (a) Studiare qualitativamente la soluzione (con particolare riferimento all'eventuale esistenza globale nel futuro/passato, al comportamento asintotico e alle proprietà di monotonia/convessità) nel caso  $\alpha = 2025$ .
- (b) Studiare qualitativamente la soluzione nel caso  $\alpha = 0$ .
- (c) (Bonus question) Tornando al caso  $\alpha = 2025$ , calcolare

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log(u(t)^4 - 9)}{t}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.