Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 28 Giugno 2025

1. (a) Calcolare il
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+7}\right).$$
   (b) Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+3n+1}-\sqrt[n]{n^2+7}\right)^{\alpha}.$$

2. (a) Determinare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni dell'equazione
$$x+2|\arctan x|=\lambda.$$
   (b) Determinare per quali valori del parametro reale $a > 0$ la funzione
$$g(x)=x+a|\arctan x|$$
   è iniettiva come funzione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1}=\frac{\arctan x_n}{x_n^2+7}, \qquad x_0=2025.$$
   (a) Determinare il limite di x_n.
   (b) Determinare il limite di $\sqrt[n]{x_n}$.
   (c) (Bonus question) Stabilire se esiste un dato iniziale x_0 per cui la successione risultante verifica $a_{2025}=1/2025$.

4. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri e, nel caso in cui convergano, determinarne il valore:
$$\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{x^3+x}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^{5}\frac{\log x}{x^2}\,dx.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. (a) Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+7}\right).$$

(b) Studiare, al variare del parametro $\alpha>0$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+3n+1}-\sqrt[n]{n^2+7}\right)^{\alpha}.$$

(a) "Razionalizzando" si ottiene

$$\sqrt{\dots}-\sqrt{\dots}=\frac{\cancel{n^2}+3n+1-\cancel{n^2}-7}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+7}}\to\boxed{\frac{3}{2}}$$

raccogliendo per bene n sopra e sotto

(b) Detta a_n l'espressione tra le parentesi tonde, il punto è dimostrare che

$$a_n=\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui seguirà che la serie converge $\boxed{\Leftrightarrow\ \alpha>\frac{1}{2}}$

Infatti

$$\sqrt[n]{n^2+3n+1}-\sqrt[n]{n^2+7}=e^{\frac{1}{n}\log(\dots)}-e^{\frac{1}{n}\log(\dots)}=\star$$

Ora $\frac{1}{n}\log(n^2+3n+1)=\frac{2\log n}{n}+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\frac{2\log n}{n}+\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e analogamente

$$\frac{1}{n}\log(n^2+7)=\frac{2\log n}{n}+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{7}{n^2}\right)=\frac{2\log n}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui

$$\star=\underbrace{e^{\frac{2\log n}{n}}}_{1+o(1)}\underbrace{\left(e^{\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}-e^{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)}_{\left(1+\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)}=\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$n=1$

2. (a) Determinare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni dell'equazione

$$x + 2|\arctan x| = \lambda.$$

(b) Determinare per quali valori del parametro reale $a > 0$ la funzione

$$g(x) = x + a|\arctan x|$$

è iniettiva come funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x + 2\arctan x & x \geq 0 \\ x - 2\arctan x & x \leq 0 \end{cases}$

Per $x \geq 0$ è strett. cresc. con $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

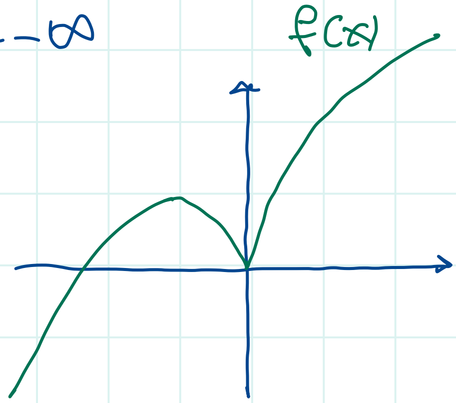
Per $x \leq 0$ si ha $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$

quindi f è strett. cresc. per $x \leq -1$ e strett. decresc. in $[-1, 0]$

Inoltre $f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

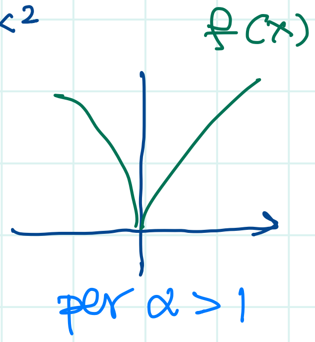
Quindi

1 sol	$x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{\pi}{2} - 1, +\infty)$
2 sol	$x \in \{0, \frac{\pi}{2} - 1\}$
3 sol	$x \in (0, \frac{\pi}{2} - 1)$



(b) g è iniettiva se e solo se $\alpha \leq 1$

- Se $\alpha \leq 1$, allora $g'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\alpha}{1+x^2} & \text{se } x > 0 \\ 1 - \frac{\alpha}{1+x^2} = \frac{x^2 + (1-\alpha)}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$
  quindi $g'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, quindi g strett. crescente
- Se $\alpha > 1$, allora $g'(x) < 0$ in un intorno sx di $x = 0$, quindi c'è un min. loc. in $x = 0$ e quindi addio iniettività



3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{\arctan x_n}{x_n^2 + 7}, \qquad x_0 = 2025.$$

(a) Determinare il limite di x_n.

(b) Determinare il limite di $\sqrt[n]{x_n}$.

(c) (Bonus question) Stabilire se esiste un dato iniziale x_0 per cui la successione risultante verifica $a_{2025} = 1/2025$.

(a) $\boxed{\text{Il limite è 0 qualunque sia } x_0.}$ Basta oss. che

$$|x_{n+1}| = \frac{|\arctan x_n|}{x_n^2+7} \le \frac{|x_n|}{x_n^2+7} \le \frac{|x_n|}{7} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui $\quad |x_{n+1}| \le \frac{1}{7^n} |x_0|$ e conclusione con i carabinieri.

(b) Per induzione si dimostra che $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
A questo punto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \boxed{\frac{\arctan(x_n)}{x_n}} \cdot \frac{1}{x_n^2+7} \to \frac{1}{7}$$

$\downarrow \; y = x_n$

$1 \quad \cdots$ limite notevole

e quindi per rapporto → radice anche $\boxed{\sqrt[n]{x_n} \to \frac{1}{7}}$

(c) Osserviamo che $|x_1| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{7}$, qualunque sia x_0, e qui come nel p.to (a) si ottiene

$$|x_n| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{7^n},$$ il che rende $\boxed{\text{impossibile}}$ che

$$x_{2025} = \frac{1}{2025}.$$

4. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri e, nel caso in cui convergano, determinarne il valore:

$$\text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x}\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_0^{5} \frac{\log x}{x^2}\,dx.$$

(a) L'integrale converge per confr. asint. con $\frac{1}{x^2}$.
Essendo

$$\frac{x+2}{x^3+x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1},$$ una primitiva è

$$2\log x + \arctan x - \log(x^2+1) = \arctan x + \log\frac{x^2}{x^2+1}$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\arctan A + \log\frac{A^2}{A^2+1} - \arctan 1 - \log\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{4} + \log 2 = \boxed{\frac{\pi}{4} + \log 2}$$

(b) L'integrale converge per confronto asintotico con $\frac{1}{x^{3/2}}$ o con $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in (1,2)$ (casi limite).

Una primitiva è $-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}$ e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{\log A}{A} - \frac{1}{A} + 1\right) = \boxed{1}$$

(c) L'integrale $\boxed{\text{diverge a } -\infty}$ perché $\frac{\log x}{x^2} < 0$ e $\frac{|\log x|}{x^2} \geq \frac{1}{x^2}$ in un intorno destro di $x=0$.

Alternative per (c): confronto asintotico con $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in [1,2]$ (sempre casi limite) oppure usare la definizione.