

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

# Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 28 Giugno 2025

1. (a) Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 + 7} \right).$$

- (b) Studiare, al variare del parametro  $\alpha > 0$ , il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n^2 + 3n + 1} - \sqrt[n]{n^2 + 7} \right)^{\alpha}.$$

2. (a) Determinare, al variare del parametro reale  $\lambda$ , il numero di soluzioni dell'equazione

$$x + 2|\arctan x| = \lambda.$$

- (b) Determinare per quali valori del parametro reale  $a > 0$  la funzione

$$g(x) = x + a|\arctan x|$$

è iniettiva come funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{\arctan x_n}{x_n^2 + 7}, \quad x_0 = 2025.$$

- (a) Determinare il limite di  $x_n$ .

- (b) Determinare il limite di  $\sqrt[n]{x_n}$ .

- (c) (Bonus question) Stabilire se esiste un dato iniziale  $x_0$  per cui la successione risultante verifica  $a_{2025} = 1/2025$ .

4. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri e, nel caso in cui convergano, determinarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx, \quad \int_0^5 \frac{\log x}{x^2} dx.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.