

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

# Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 07 Giugno 2025

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\cosh x - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{\cos x - e^x + \arctan x}.$$

- (a) Determinare il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow 0$ .
- (b) Determinare il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

2. Consideriamo la funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1 + t^4} dt.$$

- (a) Dimostrare che la funzione ammette un limite reale  $\ell$  per  $x \rightarrow +\infty$ .
- (b) Stabilire se la funzione ammette massimo/minimo su tutto  $\mathbb{R}$ , ed eventualmente calcolarli.
- (c) Stabilire se la funzione è Lipschitziana su tutto  $\mathbb{R}$ .
- (d) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale  $a > 0$ , la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} |\ell - g(x)|^a dx.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{x_n + 3}, \quad x_0 = \frac{1}{2025}.$$

- (a) Determinare il limite di  $x_n$ .
- (b) Determinare, al variare del parametro reale  $b$ , il limite di  $\sqrt[n]{|x_n - b|}$ .

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'(t) = e^{u(t)} \cdot \cos t, \quad u(0) = \alpha.$$

- (a) Determinare la soluzione del problema nel caso particolare  $\alpha = 7$ , precisando anche se nel futuro si ha esistenza globale, blow up o break down.
- (b) Determinare per quali valori reali di  $\alpha$  la soluzione è globale nel passato e nel futuro.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.  
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.