Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 07 Giugno 2025

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \frac{\cosh x - \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}}{\cos x - e^x + \arctan x}.$$
   (a) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to 0$.
   (b) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1 + t^4}\, dt.$$
   (a) Dimostrare che la funzione ammette un limite reale ℓ per $x \to +\infty$.
   (b) Stabilire se la funzione ammette massimo/minimo su tutto $\mathbb{R}$, ed eventualmente calcolarli.
   (c) Stabilire se la funzione è Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$.
   (d) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale $a > 0$, la convergenza dell'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} |\ell - g(x)|^a\, dx.$$

3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{x_n + 3}, \qquad x_0 = \frac{1}{2025}.$$
   (a) Determinare il limite di x_n.
   (b) Determinare, al variare del parametro reale b, il limite di $\sqrt[n]{|x_n - b|}$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy
$$u'(t) = e^{u(t)} \cdot \cos t, \qquad u(0) = \alpha.$$
   (a) Determinare la soluzione del problema nel caso particolare $\alpha = 7$, precisando anche se nel futuro si ha esistenza globale, blow up o break down.
   (b) Determinare per quali valori reali di α la soluzione è globale nel passato e nel futuro.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\cosh x - \sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{\cos x - e^x + \arctan x}.$$

(a) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to 0$.

(b) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

(a) Numeratore $= 1 + \frac{x^2}{2} - \left(1 + x^2 + o(x^2)\right)^{1/3}$

$= 1 + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) = \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

Denominatore $= \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + \cancel{x} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} \to \boxed{-\frac{1}{6}} \quad \text{per } x \to 0^+$$

(b) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, quindi raccogliendo e^x sopra e sotto

$$f(x) = \frac{\frac{1+\boxed{e^{-2x}}}{2} + \boxed{\frac{1}{e^x}\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}}{\boxed{\frac{\cos x}{e^x}} - 1 + \boxed{\frac{\arctan x}{e^x}}} \to \boxed{-\frac{1}{2}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

I vari limiti nulli, quando non seguono immediatamente dai teoremi algebrici, si giustificano con i carabinieri. Ad esempio

$$\boxed{\frac{1}{e^x}} \leq \boxed{\frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{e^x}} \leq \boxed{\frac{\sqrt[3]{2}}{e^x}}$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

— o — o —

2. Consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^4}\, dt.$$

(a) Dimostrare che la funzione ammette un limite reale ℓ per $x \to +\infty$.

(b) Stabilire se la funzione ammette massimo/minimo su tutto $\mathbb{R}$, ed eventualmente calcolarli.

(c) Stabilire se la funzione è Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$.

(d) (Bonus question) Studiare, al variare del parametro reale $a > 0$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} |\ell - g(x)|^a\, dx.$$

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^4}\, dt$ per definizione di int. improprio

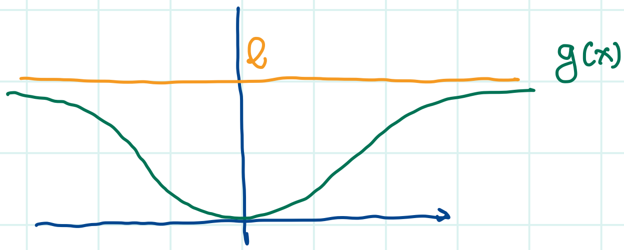
L'integrale converge per confronto asintotico con $\frac{1}{t^4}$

(b) La funzione $g(x)$ è PARI in quanto primitiva di una funzione dispari.
Inoltre

$$g'(x) = \frac{\arctan x}{1+x^4}$$

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - - - & \bullet & + + + \quad g'(x) \\ \searrow & & \nearrow \end{array}$$

Il grafico è quello in figura.



$$\boxed{\begin{array}{l} \min\{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0 \\ \max\{g(x) : x \in \mathbb{R}\} \text{ non esiste} \end{array}}$$

$\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \ell$

(c) Poiché $|g'(x)| \le \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g(x) \text{ è Lipschitziana in } \mathbb{R}}$

(d) Intanto $\ell - g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $\ell - g(x) \sim \frac{1}{x^3}$ poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ell - g(x)}{\frac{1}{x^3}} \underset{\text{H\^op}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-g'(x)}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} \cdot \frac{x^4}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Quindi l'integrale converge se e solo se $\boxed{a > \frac{1}{3}}$.

— o — o —

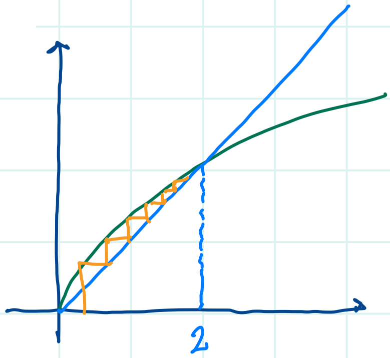
3. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{x_n+3}, \qquad x_0 = \frac{1}{2025}.$$

(a) Determinare il limite di x_n.

(b) Determinare, al variare del parametro reale b, il limite di $\sqrt[n]{|x_n - b|}$.

(a) Dimostriamo che $\boxed{x_n \to 2}$



Osserviamo intanto che, per $x \geq 0$,

$$f(x) \geq x \iff \frac{5x}{x+3} \geq x \iff 5x \geq x^2+3x$$

$$\iff x^2 \leq 2x$$

$\iff x \in [0,2]$ con uguaglianza per $x=0$ e $x=2$

PIANO

(i) $\frac{1}{2025} \leq x_n \leq 2 \quad \forall n \geq 0$ (induzione)

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq 0$ (ricorrenza + disequazione)

(iii) $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ((i) + (ii) + teo. succ. monotone)

(iv) $\ell = 2$ (unica sol. di $f(\ell)=\ell$ compatibile con (i))

(b) Se $b \neq 2$, allora $|x_n - b|^{\frac{1}{n}} \to |2-b|^0 = 1$

Se $b=2$, allora intanto $|x_n - b| = 2 - x_n \to 0$.

Per rapporto $\to$ radice

$$\frac{2-x_{n+1}}{2-x_n} = \frac{2-\frac{5x_n}{x_n+3}}{2-x_n} = \frac{2x_n+6-5x_n}{(2-x_n)(x_n+3)}$$

$$= \frac{6-3x_n}{(2-x_n)(x_n+3)} = \frac{3}{x_n+3} \to \frac{3}{5}$$

e di conseguenza $\sqrt[n]{2-x_n} \to \frac{3}{5}$

Quindi $\sqrt[n]{|x_n - b|} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} 1 & \text{se } b \neq 2 \\ \frac{3}{5} & \text{se } b = 2 \end{cases}}$

Oss. Guarda caso, la derivata di $\frac{5x}{x+3}$ in $x=2$ vale $\frac{3}{5}$

—o—o—

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'(t) = e^{u(t)} \cdot \cos t, \qquad u(0) = \alpha.$$

(a) Determinare la soluzione del problema nel caso particolare $\alpha = 7$, precisando anche se nel futuro si ha esistenza globale, blow up o break down.

(b) Determinare per quali valori reali di α la soluzione è globale nel passato e nel futuro.

(a) Si tratta di una eq. diff. a variabili separabili

$$e^{-u}\,du = \cos t\,dt \rightsquigarrow -e^{-u} = \sin t + c$$

$$\rightsquigarrow e^{-u} = c - \sin t \rightsquigarrow -u(t) = \log(c - \sin t)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u(t) = -\log(c - \sin t)}$$

soluzione generale

$$\alpha = u(0) = -\log c$$

$$\rightsquigarrow \log c = -\alpha \rightsquigarrow c = e^{-\alpha}$$

$$u(t) = -\log(e^{-\alpha} - \sin t) \rightsquigarrow \boxed{u(t) = -\log(e^{-7} - \sin t)}$$

La soluzione ha $\boxed{\text{BU a } +\infty}$ quando $\sin t = e^{-7}$, il che nel futuro accade quando

$$\boxed{t = \arcsin(e^{-7})}$$

(b) I problemi ci sono quando $\sin t = e^{-\alpha}$

→ Se $\alpha < 0$, allora $e^{-\alpha} > 1$, quindi $\sin t = e^{-\alpha}$ non ha soluzioni, quindi non ci sono problemi

→ Se $\alpha \geq 0$, allora $0 < e^{-\alpha} \leq 1$, quindi esistono valori di t, sia positivi sia negativi, per cui $\sin t = e^{-\alpha}$.

Conclusione

- Per $\alpha < 0$ c'è esistenza globale nel passato e nel futuro
- Per $\alpha \geq 0$ c'è blow up a $+\infty$ sia nel passato sia nel futuro

— o — o —