Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 15 Febbraio 2025

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = x^2 - \log x.$$
   (a) Dimostrare che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \geq 1$.
   (b) Dimostrare che $f(x) \geq \log \sqrt{2e}$ per ogni $x > 0$.

2. Stabilire per quali numeri reali $a > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n^2 + a^n}\right).$$

3. Consideriamo la funzione
$$g(x) = \left(1 + x\right)^{x^2} - \left(1 + x^2\right)^{x}.$$
   (a) Determinare il limite di $g(x)$ per $x \to +\infty$.
   (b) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x)$ per $x \to 0$.
   (c) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x)$ per $x \to 1$.

4. Consideriamo la funzione
$$h(x) = e^x - x^{77} - \arctan x.$$
   (a) Determinare se $h(x)$ ammette minimo su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che $x = 0$ è un punto stazionario per $h(x)$, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.
   (c) Dimostrare che l'equazione $h(x) = 0$ ha almeno due soluzioni reali positive.
   (d) (Bonus question) Stabilire se $h(x)$ è monotona per $x \leq 0$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 - \log x.$$

(a) Dimostrare che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \geq 1$.

(b) Dimostrare che $f(x) \geq \log \sqrt{2e}$ per ogni $x > 0$.

(a) Basta osservare che $f(1) = 1$ e $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} \geq 1$ per $x \geq 1$

quindi f è strett. crescente per $x \geq 1$

(b) Si tratta di trovare il minimo di $f(x)$ per $x > 0$.

Per far questo studiamo la funzione per $x > 0$.

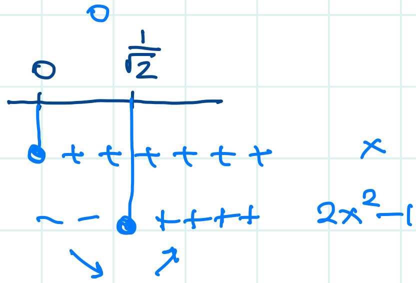
Osserviamo che $f(x)$ è definita e continua per $x > 0$ e inoltre, anche se non serve strettamente,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = [0 - (-\infty)] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^2}_{\downarrow\, +\infty} \Big(1 - \underbrace{\frac{\log x}{x^2}}_{\downarrow\, 0}\Big) = +\infty$$

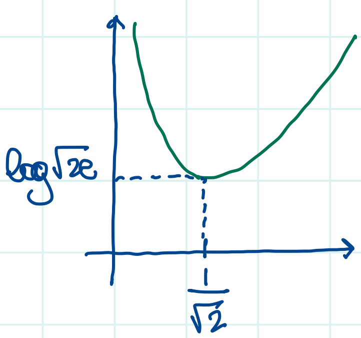
Inoltre

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$



Dallo studio del segno di $f'(x)$ si deduce che $f(x)$ ammette minimo per $x = \sqrt{2}$ e

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log \sqrt{e} + \log \sqrt{2} = \log \sqrt{2e}$$



— o — o —

2. Stabilire per quali numeri reali $a > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n^2 + a^n}\right).$$

La serie converge $\boxed{\text{se e solo se } a > 1}$. Per dimostrarlo distinguiamo 2 casi.

1. Se $a \leq 1$, allora la serie si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, che diverge. Infatti

$$\frac{n \arctan\left(\frac{1}{n^2+a^n}\right)}{\frac{1}{n}} = n^2 \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2+a^n}\right)}{\frac{1}{n^2+a^n}} \cdot \frac{1}{n^2+a^n} \to 1.$$

Nel limite ho usato che

$$\frac{n^2}{n^2+a^n} = \frac{1}{1+\frac{a^n}{n^2}} \to \frac{1}{1+0} = 1$$

qui uso che $0 \leq a \leq 1$

e anche l'altra frazione tende a 1 riducendosi al limite notevole con la sostituzione $x = \frac{1}{n^2+a^n}$.

2. Se $a > 1$, allora la serie si comporta come $\sum \frac{n}{a^n}$, la quale converge per $a > 1$ per il criterio della radice.
Il confronto asintotico si riduce al limite

$$\frac{n \arctan\left(\frac{1}{n^2+a^n}\right)}{\frac{n}{a^n}} = \underbrace{\boxed{\frac{a^n}{n^2+a^n}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2+a^n}\right)}{\frac{1}{n^2+a^n}}}}_{\downarrow\, 1} \to 1$$

Nel limite ho trattato come prima la frazione con arctan e nell'altra

$$\frac{a^n}{n^2+a^n} = \frac{1}{\underbrace{\boxed{\frac{n^2}{a^n}}}_{\to 0} + 1} \to \frac{1}{0+1} = 1$$

perché esponenziale con base >1 batte potenza

3. Consideriamo la funzione

$$g(x) = (1+x)^{x^2} - (1+x^2)^x .$$

(a) Determinare il limite di $g(x)$ per $x \to +\infty$.

(b) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x)$ per $x \to 0$.

(c) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x)$ per $x \to 1$.

(a) Osserviamo che $(1+x)^{x^2} \geq x^{x^2}$ per ogni $x > 0$ e $(1+x^2)^x \leq (2x^2)^x$ per ogni $x \geq 1$. Dunque per $x \geq 1$ si ha che

$$g(x) \geq x^{x^2} - (2x^2)^x = x^{x^2} - 2^x \cdot x^{2x} = x^{x^2}\left(1 - \frac{2^x \cdot x^{2x}}{x^{x^2}}\right)$$

$$= \underset{\downarrow\, +\infty}{\boxed{x^{x^2}}}\Big(1 - \underset{\hookrightarrow\, e^{-\infty} = 0}{\boxed{e^{x\log 2 + (2x - x^2)\log x}}}\Big)$$

dove abbiamo usato che

$$x\log 2 + (2x - x^2)\log x = x\left[\log 2 + (2-x)\log x\right] \to -\infty$$

Per confronto a due segue che $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

Achtung! Non è corretto brutalizzare tutto e dire che

$$(1+x)^{x^2} \sim x^{x^2} \qquad \text{e} \qquad (1+x^2)^x \sim x^{2x}$$

Nel primo caso infatti

$$(1+x)^{x^2} = x^{x^2}\boxed{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}$$

← Questo non tende a 1, ma diverge come e^x

(b) $$(1+x)^{x^2} = e^{x^2\log(1+x)} = e^{x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = 1 + x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

$$(1+x^2)^x = e^{x\log(1+x^2)} = e^{x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)} = 1 + x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

Mettendo insieme: $g(x) = \cancel{1} + \cancel{x^3} - \frac{x^4}{2} - \cancel{1} - \cancel{x^3} + o(x^4) = \boxed{-\frac{x^4}{2}} + o(x^4)$

↑ parte principale (ordine di infinitesimo uguale a 4)

(c) Osserviamo che

$$g'(x) = \left[e^{x^2\log(1+x)} - e^{x\log(1+x^2)}\right]'$$

$$= (1+x)^{x^2}\left[2x\log(1+x) + \frac{x^2}{1+x}\right] - (1+x^2)^x\left[\log(1+x^2) + \frac{x\cdot 2x}{1+x^2}\right]$$

da cui $g'(1) = 2\left[2\log 2 + \frac{1}{2}\right] - 2\left[\log 2 + \frac{2}{2}\right] = -1 + \log 4$

da cui $g(1+h) = \underset{0}{g(1)} + g'(1)h + o(h) = \boxed{(-1+\log 4)h} + o(h)$

↑ parte principale
(ordine infinitesimo uguale ad 1)

<u>Alternativa per (c)</u> Allo stesso risultato si poteva giungere sviluppando all'ordine 1

$$g(1+h) = [1+(1+h)]^{(1+h)^2} - [1+(1+h)^2]^{1+h}$$

$$= e^{(1+h)^2\log(2+h)} - e^{(1+h)\log(2+2h+h^2)}$$

Ora, a meno di $o(h)$, gli esponenti si sviluppano come

$$(1+h)^2\log(2+h) = (1+2h)\left[\log 2 + \log\left(1+\frac{h}{2}\right)\right]$$
$$= (1+2h)\left[\log 2 + \frac{h}{2}\right] = \log 2 + \left(2\log 2 + \frac{1}{2}\right)h$$

e

$$(1+h)\log(2+2h+h^2) = (1+h)\log(2+2h) = (1+h)[\log 2 + \log(1+h)]$$
$$= (1+h)[\log 2 + h] = \log 2 + (\log 2 + 1)h$$

A questo punto non resta che sostituire nell'esponenziale.

— o — o —

4. Consideriamo la funzione

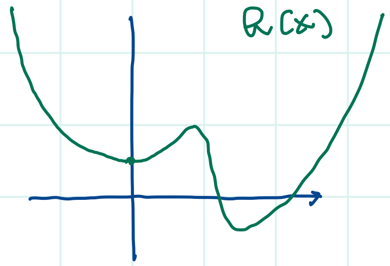
$$h(x) = e^x - x^{77} - \arctan x.$$

(a) Determinare se $h(x)$ ammette minimo su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che $x = 0$ è un punto stazionario per $h(x)$, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.

(c) Dimostrare che l'equazione $h(x) = 0$ ha almeno due soluzioni reali positive.

(d) (Bonus question) Stabilire se $h(x)$ è monotona per $x \leq 0$.



(a) Basta osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$$

comanda e^x — comanda x^{77}

e a quel punto la tesi segue da Weierstrass generalizzato.

(b) Basta osservare che

$$h(x) = 1 + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 - \cancel{x} + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

e quindi $x=0$ è un pto di $\boxed{\text{minimo relativo}}$ per $h(x)$.

(c) Basta osservare che $h(2) = e^2 - 2^{77} - \arctan 2 \leq 100 - 2^{77} < 0$.
Essendo $f(0) = 1$, dal teorema di esistenza degli zeri applicato in $[0,2]$ sappiamo che esiste almeno una soluzione $c_1 \in (0,2)$.
Inoltre, poiché $h(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, esiste $A > 2$ t.c. $f(A) > 0$. Applicando il teorema di esistenza degli zeri in $[2, A]$ troviamo almeno un'altra soluzione $c_2 \in (2, A)$.

(d) La funzione $h(x)$ è $\boxed{\text{strettamente decrescente per } x \leq 0.}$
Infatti

$$g'(x) = e^x - 77x^{76} - \frac{1}{1+x^2}$$

per cui è sufficiente dimostrare che $e^x - \frac{1}{1+x^2} < 0$ per $x < 0$
o equivalentemente $(1+x^2)e^x < 1$ per $x < 0$.
Ora studiando la funzione $(1+x^2)e^x$ si scopre che, per $x \leq 0$ è strettamente crescente (la sua derivata è $(1+x)^2 e^x$) e quindi vale sempre meno del valore per $x=0$ che è proprio 1.

— o — o —