Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 15 Febbraio 2025

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = x^2 - \log x.$$
   (a) Dimostrare che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \geq 1$.
   (b) Dimostrare che $f(x) \geq \log \sqrt{2e}$ per ogni $x > 0$.

2. Stabilire per quali numeri reali $a > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n^2 + a^n}\right).$$

3. Consideriamo la funzione
$$g(x) = \left(1 + x\right)^{x^2} - \left(1 + x^2\right)^{x}.$$
   (a) Determinare il limite di $g(x)$ per $x \to +\infty$.
   (b) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x)$ per $x \to 0$.
   (c) Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $g(x)$ per $x \to 1$.

4. Consideriamo la funzione
$$h(x) = e^x - x^{77} - \arctan x.$$
   (a) Determinare se $h(x)$ ammette minimo su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Dimostrare che $x = 0$ è un punto stazionario per $h(x)$, e stabilire di che tipo di punto stazionario si tratta.
   (c) Dimostrare che l'equazione $h(x) = 0$ ha almeno due soluzioni reali positive.
   (d) (Bonus question) Stabilire se $h(x)$ è monotona per $x \leq 0$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.