

Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 25 Gennaio 2025

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x \sin x - \log(1 + x^2)}{\sqrt[3]{1 + x^4} - \cos(x^3)}.$$

- (a) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.
- (b) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$.

2. Studiare, al variare del parametro reale λ , il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$\lambda x^8 + x^7 = 1.$$

3. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^\alpha + 3} - n}{n^2 + 5}.$$

- (a) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 4$.
- (b) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 1$.
- (c) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 2$.

4. Consideriamo la funzione

$$g(x) = 3 \cos(x^4 - x^{10}) + x^5 \arctan(x^3).$$

- (a) Determinare il polinomio di Taylor di grado 8 di $g(x)$ con centro in $x = 0$.
- (b) Stabilire se la funzione, vista come $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è surgettiva.
- (c) Dimostrare che l'equazione $g(x) = 3$ ha almeno tre soluzioni reali.
- (d) Calcolare la derivata 14-esima di $g(x)$ in $x = 0$.
- (e) (Bonus question) Sia c_n una successione di numeri reali positivi tale che $g(c_n) = 2025^n$ per ogni intero positivo n .

Determinare per quali valori reali di x converge la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.