Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Prova in Itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 25 Gennaio 2025

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) = \frac{x \sin x - \log(1+x^2)}{\sqrt[3]{1+x^4} - \cos(x^3)}.$$
   (a) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to 0$.
   (b) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$.

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione
$$\lambda x^8 + x^7 = 1.$$

3. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^\alpha + 3} - n}{n^2 + 5}.$$
   (a) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 4$.
   (b) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 1$.
   (c) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 2$.

4. Consideriamo la funzione
$$g(x) = 3\cos(x^4 - x^{10}) + x^5 \arctan(x^3).$$
   (a) Determinare il polinomio di Taylor di grado 8 di $g(x)$ con centro in $x = 0$.
   (b) Stabilire se la funzione, vista come $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è surgettiva.
   (c) Dimostrare che l'equazione $g(x) = 3$ ha almeno tre soluzioni reali.
   (d) Calcolare la derivata 14-esima di $g(x)$ in $x = 0$.
   (e) (Bonus question) Sia c_n una successione di numeri reali positivi tale che $g(c_n) = 2025^n$ per ogni intero positivo n.
   Determinare per quali valori reali di x converge la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x \sin x - \log(1+x^2)}{\sqrt[3]{1+x^4} - \cos(x^3)}.$$

(a) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to 0$.

(b) Determinare il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$.

(a) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \rightsquigarrow x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$ termine succ. x^6

$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \rightsquigarrow \log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ termine succ x^6

$(1+t)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}t + o(t) \rightsquigarrow (1+x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$ termine succ. x^8

$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \rightsquigarrow \cos(x^3) = 1 + o(x^4)$ termine succ. x^6

Mettendo insieme:

$$\frac{x \sin x - \log(1+x^2)}{\sqrt[3]{1+x^4} - \cos(x^3)} = \frac{x^2 - \frac{1}{6}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{1 + \frac{1}{3}x^4 - 1 + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}$$

che quindi tende a 1 per $x \to 0$

(b) Raccogliendo $|x|^{4/3}$ sopra e sotto ci ritroviamo

$$\frac{\frac{\sin x}{|x|^{4/3}} - \frac{\log(1+x^2)}{|x|^{4/3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}} - \frac{\cos(x^3)}{|x|^{4/3}}} \to \frac{0-0}{1-0} = 0$$

Giustifichiamo i 4 limiti

$$\underbrace{\boxed{-\frac{1}{|x|^{4/3}}}}_{\to 0} \leq \frac{\sin x}{|x|^{4/3}} \leq \underbrace{\boxed{\frac{1}{|x|^{4/3}}}}_{\to 0}$$ Idem con il $\cos(x^3)$ $\qquad \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}} \to \sqrt[3]{1} = 1$

$$\frac{\log(1+x^2)}{|x|^{4/3}} = \frac{\log x^2 + \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|^{4/3}} = 2\underbrace{\boxed{\frac{\log x}{|x|^{4/3}}}}_{\to 0} + \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|^{4/3}}}}_{\to 0}$$

potenza batte logaritmo $\qquad \frac{0}{+\infty}$

2. Studiare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$\lambda x^8 + x^7 = 1.$$

Osserviamo che $x=0$ non è mai soluzione, quindi possiamo dividere per x^8 e riscrivere l'equazione nella forma

$$\boxed{\frac{1-x^7}{x^8}} = \lambda$$

$\uparrow f(x)$

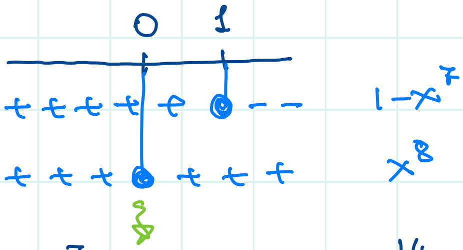
Studiamo la funzione $f(x)$.

(1) Definita e continua per $x \neq 0$

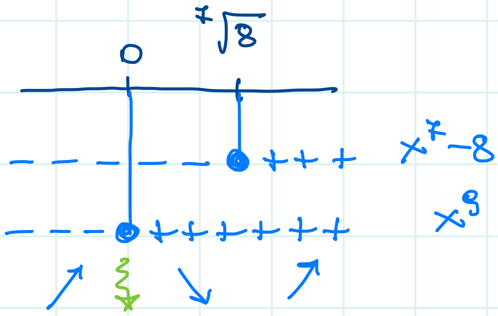
(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ $\quad \left[\frac{1}{0^+}\right]$

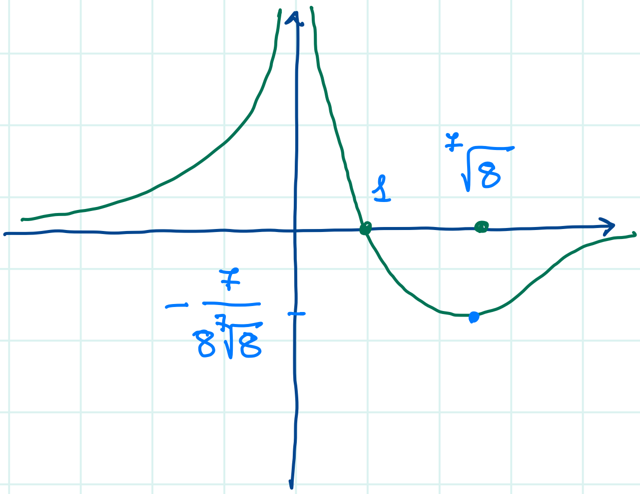
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$

(3) Segno di $f(x)$



(4) $$f'(x) = \frac{-7x^6 \cdot x^8 - 8x^7(1-x^7)}{x^{16}} = \frac{x^{14} - 8x^7}{x^{16}} = \frac{x^7-8}{x^8}$$





$$f(\sqrt[7]{8}) = -\frac{7}{8^{8/7}} = -\frac{7}{8\sqrt[7]{8}}$$

Conclusioni:

0 soluzioni $\quad$ per $\quad \lambda < -\frac{7}{8\sqrt[7]{8}}$

1 soluzione $\quad$ per $\quad \lambda = -\frac{7}{8\sqrt[7]{8}}$ e per $\lambda = 0$

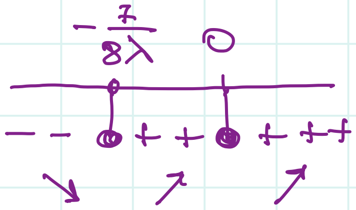
2 soluzioni $\quad$ per $\quad -\frac{7}{8\sqrt[7]{8}} < \lambda < 0$ e per $\lambda > 0$

$\boxed{\text{Soluzione alternativa}}$ Studiamo la funzione $\underbrace{\lambda x^8 + x^7}_{g(x)}$

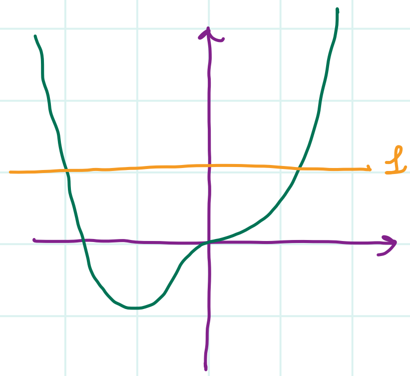
① Per $\lambda = 0$ dobbiamo risolvere $x^7 = 1$ che ha come sol. unica $x = 1$

② Per $\lambda > 0$ abbiamo che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

Inoltre $g(0) = 0$ e $g'(x) = 8\lambda x^7 + 7x^6 = x^6(8\lambda x + 7)$, quindi il segno di $g'(x)$ è come in figura

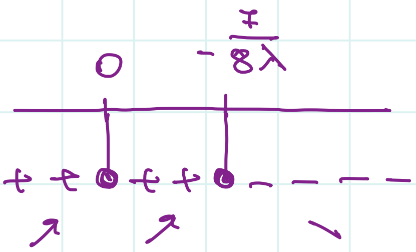


Se ne deduce che $g(x) = 1$ ha sempre esattamente due soluzioni



③ Per $\lambda < 0$ abbiamo che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

Inoltre $g(0) = 0$ e il segno di $g'(x)$ è come in figura (occhio che ora $-\frac{7}{8\lambda}$ è positivo)



Se ne deduce che ora l'eq. $g(x) = 1$ avrà 0/1/2 soluzioni a seconda che l'ascissa del massimo sia $<, =, > 1$.

Ora $g\left(-\frac{7}{8\lambda}\right) = \lambda \frac{7^8}{8^8 \lambda^8} - \frac{7^7}{\lambda^7 8^7} = -\frac{7^7}{8^8 \lambda^7}$

e confrontando questo valore con 1 si ottiene esattamente il risultato precedente.

— o — o —

3. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^\alpha + 3} - n}{n^2 + 5}.$$

(a) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 4$.

(b) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 1$.

(c) Determinare il comportamento della serie nel caso $\alpha = 2$.

Sia a_n il termine generale della serie.

(a) Per $\boxed{\alpha = 4}$ si ha che $a_n \to 1$, quindi manca la condizione necessaria, quindi la serie $\boxed{\text{diverge a } +\infty}$ (ovviamente $a_n > 0$ definitivamente in quanto tende a 1).

Per dimostrarlo basta raccogliere n^2 sopra e sotto

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^4}} - \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n^2}} \to \frac{\sqrt{1} - 0}{1 + 0} = 1$$

(b) Per $\boxed{\alpha = 1}$ la serie è a termini definitivamente negativi e $-a_n \sim \frac{1}{n}$, quindi la serie $\boxed{\text{diverge a } -\infty}$.

Per dimostrarlo basta fare il confronto asintotico con $\boxed{\frac{1}{n}}$

$$-\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n\left(n - \sqrt{n+3}\right)}{n^2 + 5} \underset{\text{raccolgo } n^2}{=} \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}}{1 + \frac{5}{n^2}} \to \frac{1 - \sqrt{0}}{1 + 0} = 1$$

(c) Per $\boxed{\alpha = 2}$ la serie $\boxed{\text{converge}}$ per confronto asintotico con $\boxed{\frac{1}{n^3}}$

Per dimostrarlo basta dividere e razionalizzare

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} = n^3 \frac{\sqrt{n^2+3} - n}{n^2 + 5} \cdot \frac{\sqrt{\dots} + n}{\sqrt{\dots} + n} = \frac{n^3 \left(n^2 + 3 - n^2\right)}{(n^2+5)\left(\sqrt{n^2+3} + n\right)}$$

Raccolgo n^3 sotto

$$= \frac{3}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + 1\right)} \to \frac{3}{(1+0)\left(\sqrt{1} + 1\right)} = \frac{3}{2}$$

— o — o —

4. Consideriamo la funzione

$$g(x) = 3\cos(x^4 - x^{10}) + x^5 \arctan(x^3).$$

(a) Determinare il polinomio di Taylor di grado 8 di $g(x)$ con centro in $x = 0$.

(b) Stabilire se la funzione, vista come $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è surgettiva.

(c) Dimostrare che l'equazione $g(x) = 3$ ha almeno tre soluzioni reali.

(d) Calcolare la derivata 14-esima di $g(x)$ in $x = 0$.

(e) (Bonus question) Sia c_n una successione di numeri reali positivi tale che $g(c_n) = 2025^n$ per ogni intero positivo n.
Determinare per quali valori reali di x converge la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

Calcoliamo direttamente il polinomio di Taylor di grado 14

$$g(x) = 3\left[1 - \frac{1}{2}(x^4 - x^{10})^2 + o(x^{15})\right] + x^5\left(x^3 - \frac{1}{3}x^9 + o(x^{14})\right)$$

il termine successivo è x^{16} da $(x^4 - x^{10})^4$

il termine successivo è x^{15}

$$= 3\left(1 - \frac{1}{2}x^8 + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2x^{14}}_{\text{doppio prodotto}} + o(x^{15})\right) + x^8 - \frac{1}{3}x^{14} + o(x^{19})$$

$$= 3 - \frac{3}{2}x^8 + 3x^{14} + x^8 - \frac{1}{3}x^{14} + o(x^{14}) = 3 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{8}{3}x^{14} + o(x^{14})$$

(a) $\boxed{P_8(x) = 3 - \frac{1}{2}x^8}$

(d) $P_{14}(x) = 3 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{8}{3}x^{14}$ e quindi $\boxed{g^{(14)}(0) = \frac{8}{3}\cdot 14!}$

(b) Osserviamo che $g(x) \geq \boxed{x^5 \arctan(x^3)} - 3$

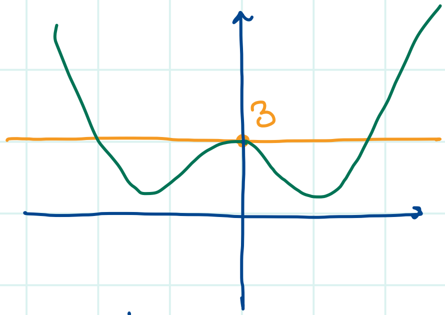
è pari e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

Essendo g continua, per Weierstrass generalizzato ammette minimo m su tutto $\mathbb{R}$, e quindi non assume valori $< m$.
Ne segue che come $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è $\boxed{\text{NON surgettiva}}$

(c) Basta osservare che una sol. è $x=0$, poi $g(x)$ ha un max loc. in $x=0$ perché si comporta come $3-\frac{1}{2}x^8$ in un intorno di $x=0$ (quindi assume valori <3) e tende a $+\infty$ per $x\to\pm\infty$ ($g(x)$ è anche pari).



(Bonus) Brutal mode: osserviamo che per $|x|$ grandi si ha

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2}|x|^5$$

e quindi

$$2025^n = g(c_n) \sim \frac{\pi}{2}|c_n|^5$$

da cui

$$|c_n| \sim \sqrt[5]{\frac{2}{\pi}}\left(\sqrt[5]{2025}\right)^n$$

Pertanto dal criterio della radice segue che la serie converge se e solo se

$$\boxed{x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{2025}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2025}}\right)}$$

Per dimostrarlo rigorosamente possiamo mostrare che

$$\underbrace{\frac{1}{10}\left(\sqrt[5]{2025}\right)^n}_{a_n} \le |c_n| \le \underbrace{10\left(\sqrt[5]{2025}\right)^n}_{b_n}$$ definitivamente

Supponiamo infatti che sia $|c_n| > b_n$. Allora

$$g(c_n) \ge b_n^5 \arctan(b_n^3) - 3 \ge b_n^5 - 3 = 10^5 \cdot 2025^n - 3 > 2025^n$$

Similmente se fosse $|c_n| < a_n$, allora

$$g(c_n) \le a_n^5 \arctan(a_n^3) + 3 \le \frac{1}{10^5} 2025^n \cdot \frac{\pi}{2} + 3 < 2025^n.$$

— o — o —