Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 08 Giugno 2024

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (1, 2, 3), \qquad C = (3, 2, 1), \qquad D = (-1, 2, -1).$$

   (a) Determinare il punto più vicino a D nel piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare il punto della retta BC più vicino ad A.

   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che è perpendicolare al piano passante per A, B, C, e lo interseca lungo la retta AB.

2. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = y - z + w = 0\right\},$$
$$W = \operatorname{Span}((1, 2, 3, 4), (0, 5, 4, 2)).$$

   Determinare una base di $V \cap W$ e $V + W$.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo, nel piano cartesiano, la rotazione in senso antiorario intorno al punto $(3, 1)$ dell'angolo θ, compreso $0°$ e $90°$, tale che $\cos\theta = 3/5$.

   (a) Scrivere l'espressione della trasformazione.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $x - 2y = 1$ rispetto a tale trasformazione.

   (c) Determinare la controimmagine della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1,0,1), \qquad B = (1,2,3), \qquad C = (3,2,1), \qquad D = (-1,2,-1).$$

(a) Determinare il punto più vicino a D nel piano passante per A, B, C.

(b) Determinare il punto della retta BC più vicino ad A.

(c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che è perpendicolare al piano passante per A, B, C, e lo interseca lungo la retta AB.

(a) Piano per A, B, C: $(1,0,1) + t\,(0,2,2) + s\,(2,2,0)$

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \rightsquigarrow (-1,1,-1) \rightsquigarrow \boxed{x-y+z=2}$$ [Verifica!]

Retta per D e $\perp$ al piano: $(-1,2,-1) + t\,(1,-1,1) = (-1+t, 2-t, -1+t)$

Intersezione: $-1+t-2+t-1+t = 2 \rightsquigarrow 3t = 6 \rightsquigarrow t = 2$

Il punto più vicino a D è $\boxed{(1,0,1)}$ [Verifica che $D-(1,0,1) \perp$ piano]

(b) Retta BC: $(1,2,3) + t\,(2,0,-2) = (1+2t, 2, 3-2t)$

Piano per A e $\perp$ alla retta: $x - z = 0$

Intersezione: $1+2t-3+2t = 0 \rightsquigarrow 4t = 2 \rightsquigarrow t = \frac{1}{2}$

Il punto più vicino ad A è $\boxed{(2,2,2)}$

(c) $(1,0,1) + t\,\underbrace{(0,2,2)}_{B-A} + s\,\underbrace{(1,-1,1)}_{\text{Direzione } \perp \text{ al piano}}$

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \rightsquigarrow (2,1,-1) \rightsquigarrow \boxed{2x+y-z=1}$$

[Verifica che i due piani sono $\perp$
Verifica che contiene A e B]

— o — o —

2. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = y - z + w = 0\right\},$$

$$W = \text{Span}(\underbrace{(1, 2, 3, 4)}_{w_1}, \underbrace{(0, 5, 4, 2)}_{w_2}).$$

Determinare una base di $V \cap W$ e $V + W$.

$V = \text{Span}\{\underbrace{(1,-1,-1,0)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1,1)}_{v_2}\}$ (si vede a occhio o si risolve il sistema)

Controllo il Determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ ora si fa con Sarrus

$\text{Det} = -8+12-20+16 = 0$

$\rightsquigarrow$ c'è una relaz. di dip. lin.

Proseguo con Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$d = 1 \quad c = -1 \quad b = 2 \quad a = 3$

[Verifica che nella matrice iniziale $3C_1 + 2C_2 = C_3 - C_4$]

Pertanto

$$\boxed{\text{Base di } V \cap W = \{(1, -3, -1, 2)\}}$$

$3C_1 + 2C_2 = C_3 - C_4$

$$\boxed{\text{Base di } V + W = 3 \text{ a caso tra } v_1, v_2, w_1, w_2}$$

— o — o —

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

È evidente che la matrice ha rango 1, dunque gli autovalori sono $0, 0, 0, 8$ ← dalla traccia

L'autospazio di 0 è $\ker A = \mathrm{Span}\{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), (1,0,0,-1)\}$

L'autospazio di 8 è il ker di $A - 8\,\mathrm{Id}$, cioè

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Forse si vede a occhio che è $\mathrm{Span}\{(1,-1,1,1)\}$ $\quad C_1 + C_3 + C_4 = C_2$

o in alternativa si risolve il sistema

Quindi

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M}$$

è tale che $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = D$

[Verifica soft che $AM = MD$]

<u>Osservazione</u> Nel risolvere il sistema per trovare $\ker(A - 8\,\mathrm{Id})$ si possono dividere tutti i coeff. per 2 in modo da avere numeri più piccoli.

—— o —— o ——

4. Consideriamo, nel piano cartesiano, la rotazione in senso antiorario intorno al punto $(3,1) = P_0$ dell'angolo θ, compreso $0°$ e $90°$, tale che $\cos\theta = 3/5$.

(a) Scrivere l'espressione della trasformazione.

(b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $x - 2y = 1$ rispetto a tale trasformazione.

(c) Determinare la controimmagine della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.

(a) La rotazione ha matrice (quando è risp. all'origine) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{tolgo } P_0}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \overset{\text{ruoto}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x-4y-5 \\ 4x+3y-15 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{aggiungo } P_0}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{pmatrix}$$

Quindi la trasformazione è

$$\boxed{(x,y) \to \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2,\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2\right)}$$

[Verifica almeno del punto fisso]

(b) Retta in parametrica: $(1,0) + t(2,1) = (1+2t, t) = (1+10t, 5t)$

Immagine in parametrica: $\left(\frac{3}{5} + 6t - 4t + 2,\ \frac{4}{5} + 8t + 3t - 2\right)$

$$= \left(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{\frac{13}{5} + 2t}},\ \underset{y}{\underset{\shortparallel}{-\frac{6}{5} + 11t}}\right) \qquad t = \frac{1}{2}x - \frac{13}{10}$$

$$y = -\frac{6}{5} + \frac{11}{2}x - \frac{143}{10} = \frac{11}{2}x - \frac{155}{10} = \frac{11}{2}x - \frac{31}{2} \rightsquigarrow \boxed{11x - 2y - 31 = 0}$$

(c) $$x^2+y^2=1 \rightsquigarrow \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2\right)^2 + \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2\right)^2 = 1$$

$$\rightsquigarrow \boxed{x^2 + y^2 - \frac{4}{5}x - \frac{28}{5}y + 7 = 0}$$

Alternativa per (c) Determino la controimmagine dell'origine risolvendo

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 = 0 \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ trovo $\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$ $\rightsquigarrow$ scrivo circonferenza con centro in questo punto e raggio 1.