

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 08 Giugno 2024

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (1, 2, 3), \quad C = (3, 2, 1), \quad D = (-1, 2, -1).$$

- (a) Determinare il punto più vicino a D nel piano passante per A, B, C .
- (b) Determinare il punto della retta BC più vicino ad A .
- (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano che è perpendicolare al piano passante per A, B, C , e lo interseca lungo la retta AB .

2. Consideriamo i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = y - z + w = 0\},$$

$$W = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (0, 5, 4, 2)).$$

Determinare una base di $V \cap W$ e $V + W$.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo, nel piano cartesiano, la rotazione in senso antiorario intorno al punto $(3, 1)$ dell'angolo θ , compreso 0° e 90° , tale che $\cos \theta = 3/5$.
- (a) Scrivere l'espressione della trasformazione.
 - (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine della retta $x - 2y = 1$ rispetto a tale trasformazione.
 - (c) Determinare la controimmagine della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.