Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

# Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 16 Dicembre 2013

1. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $P = (2, 1)$ e $Q = (4, 4)$ e la retta $r$ di equazione $5x + y + 2 = 0$.
   (a) Determinare quale punto si ottiene ruotando $Q$ di $45°$ in senso antiorario intorno al punto $P$.
   (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando $r$ di $45°$ in senso antiorario intorno al punto $P$.
   (c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad $r$ e poi la simmetria rispetto all'asse $y$.

2. Consideriamo la forma quadratica
$$q(x, y, z) = y^2 + 2xy - 6yz + axz,$$
   in cui $a$ è un parametro reale.
   (a) Nel caso $a = 1$, determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 su cui la forma risulta definita positiva.
   (b) Determinare la segnatura della forma al variare del parametro $a$.

3. Sia $b$ un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che
$$f(1, 2) = (6, b), \qquad f(1, 3) = (8, b + 5).$$
   (a) Determinare per quali valori di $b$ l'applicazione $f$ ammette una base ortonormale di autovettori, ed in tali casi determinare una tale base.
   (b) Determinare per quali valori di $b$ l'applicazione $f$ è diagonalizzabile sui reali.
   (c) Determinare per quali valori di $b$ l'applicazione $f$ *non* è diagonalizzabile sui complessi, ed in tali casi determinare la sua forma di Jordan reale.

4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 2.
   (a) Dimostrare che la formula
$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + 3p(1)q(1) + 5p(2)q(2)$$
   rappresenta un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
   (b) Determinare la matrice ad esso associata rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.
   (c) Determinare una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.



SOLUZIONI
BY GIMUSI 13/01/14

1. Consideriamo nel piano cartesiano i punti $P = (2, 1)$ e $Q = (4, 4)$ e la retta $r$ di equazione $5x + y + 2 = 0$.

   (a) Determinare quale punto si ottiene ruotando $Q$ di $45°$ in senso antiorario intorno al punto $P$.

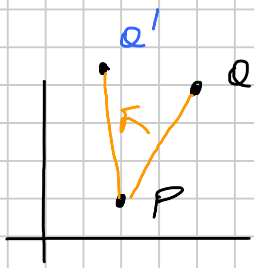
   (b) Determinare l'equazione cartesiana della retta che si ottiene ruotando $r$ di $45°$ in senso antiorario intorno al punto $P$.

   (c) Determinare quale trasformazione del piano si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad $r$ e poi la simmetria rispetto all'asse $y$.

(a) MATRICE DI ROTAZIONE $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \overset{\theta=\frac{\pi}{4}}{\rightsquigarrow} \overset{A}{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}}$

$(Q'-P) = A(Q-P) \rightsquigarrow Q' = A(Q-P)+P =$

$= \begin{pmatrix}\sqrt2/2 & -\sqrt2/2 \\ \sqrt2/2 & \sqrt2/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 \\ 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-\sqrt2/2 \\ 1+5\sqrt2/2\end{pmatrix}$




(b) $5x+y+2=0 \rightsquigarrow R=(\delta, -2-5\delta) \in r$

$r' : (R'-P) = A(R-P) \rightsquigarrow R' = A(R-P)+P =$

$= \begin{pmatrix}\sqrt2/2 & -\sqrt2/2 \\ \sqrt2/2 & \sqrt2/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta-2 \\ -3-5\delta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta\sqrt2/2 - \sqrt2 + 3\sqrt2/2 + 5\delta\sqrt2/2 + 2 \\ \delta\sqrt2/2 - \sqrt2 - 3\sqrt2/2 - 5\delta\sqrt2/2 + 1\end{pmatrix} =$

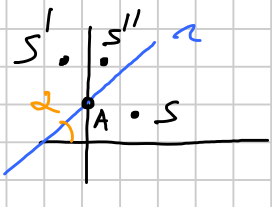
$= \begin{pmatrix}6\delta\sqrt2/2 + \sqrt2/2 + 2 \\ -4\delta\sqrt2/2 - 5\sqrt2/2 + 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow r' : \left(\frac{5+\sqrt2}{2}, \frac{2-5\sqrt2}{2}\right) + \delta\overset{v}{(3,-2)}$

$n=(2,3)\perp v$

$\rightsquigarrow$ EQ. CART: $2x+3y+c=0$ $\quad 5+\sqrt2+\dfrac{6-15\sqrt2}{2}+c=0$

$c = -\dfrac{15-13\sqrt2}{2}$ $\quad r' : 2x+3y-\dfrac{15-13\sqrt2}{2}$

(c) SIMMETRIA RISPETTO A $r$:




$S' = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}(S-A)+A$ $\quad \theta = 2\alpha$

$A \in r$ E ASSE $Y$

SIMMETRIA RISPETTO ASSE Y:

$$s'' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(s'-A) + A$$

COMPOSIZIONE:

$$s'' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}(s-A) + A = \begin{pmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}(s-A) + A =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\pi-\theta) & -\sin(\pi-\theta)\\ \sin(\pi-\theta) & \cos(\pi-\theta)\end{pmatrix}(s-A) + A \equiv$$ ROTAZIONE ANTIORARIA DI $(\pi-\theta)$ RISPETTO AD $A$

2. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x,y,z) = y^2 + 2xy - 6yz + axz,$$

in cui $a$ è un parametro reale.

(a) Nel caso $a = 1$, determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 su cui la forma risulta definita positiva.

(b) Determinare la segnatura della forma al variare del parametro $a$.

(a) $y^2 + 2xy - 6yz + axz =$

$= (x+y-3z)^2 - x^2 - 9z^2 + 6xz + axz =$

$= (x+y-3z)^2 - \left[x - \frac{(a+6)}{2}z\right]^2 + \frac{(a+6)^2}{4}z^2 - 9z^2 =$

$= (x+y-3z)^2 - \left[x - \frac{(a+6)}{2}z\right]^2 + \left(\frac{a^2+12a}{4}\right)z^2$

VER. $\cancel{x^2} + y^2 + \cancel{9z^2} + 2xy - 6yz - \cancel{6xz} - \cancel{x^2} - \cancel{\frac{(a+6)^2}{4}}z^2 + (a+\cancel{6})xz + \left(\cancel{\frac{a^2+12a}{4}}\right)z^2$

$a = 1 \rightsquigarrow q(x,y,z) = (x+y-3z)^2 - \left(x - \frac{7}{2}z\right)^2 + \frac{13}{4}z^2$

$V = \delta(0,1,0) + s(7/2,0,1) \rightsquigarrow q(v) \geq 0 \qquad q(v) = 0 \iff s = \delta = 0$

(b) $q(x,y,z) = +Q^2(x,y,z) - P^2(x,z;a) + f(a)z^2$

$\rightsquigarrow$ INDEFINITA $\forall a \in \mathbb{R}$

3. Sia $b$ un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$f(1,2) = (6,b), \qquad f(1,3) = (8, b+5).$$

(a) Determinare per quali valori di $b$ l'applicazione $f$ ammette una base ortonormale di autovettori, ed in tali casi determinare una tale base.

(b) Determinare per quali valori di $b$ l'applicazione $f$ è diagonalizzabile sui reali.

(c) Determinare per quali valori di $b$ l'applicazione $f$ *non* è diagonalizzabile sui complessi, ed in tali casi determinare la sua forma di Jordan reale.

$$\begin{cases} f(1,2) \rightsquigarrow (6,b) \\ f(1,3) \rightsquigarrow (8,b+5) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} f(0,1) = f(1,3) - f(1,2) = (2,5) \\ f(1,0) = f(1,2) - 2f(0,1) = (2, b-10) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ b-10 & 5 \end{pmatrix} \equiv \text{MATRICE ASS. A } f \text{ NELLA BASE CANONICA}$$

(a) × TEOREMA SPETTRALE $A = A^T \rightsquigarrow b - 10 = 2$ $\quad b = 12$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 6 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = 0 \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow V_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ b-10 & 5 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ b-10 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 2b + 20 =$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + (30 - 2b) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 120 + 8b}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{8b - 71}}{2}$$

$\rightsquigarrow 8b - 71 > 0$ $\quad b > 71/8$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ E DISTINTI $\Rightarrow f$ DIAGONALIZZ.

<u>OSS</u> $b = 71/8$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 7/2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{9}{8} & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = \frac{7}{2} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 - 7/2 & 2 \\ -9/8 & 5 - 7/2 \end{pmatrix} X = 0$

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 2 \\ -9/8 & 3/2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 12 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow \text{NON DIAGONALIZZABILE}$$

(c) $\begin{cases} b > 71/8 \rightsquigarrow f \text{ DIAGONALIZZ. SU } \mathbb{R} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ DISTINTI}) \\ b < 71/8 \rightsquigarrow f \text{ DIAGONALIZZ. SU } \mathbb{C} \quad (\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 \in \mathbb{C}) \\ b = 71/8 \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 7/2 \end{cases}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -9/8 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$

MG = 1 < MA = 2
JORDANIZZABILE
1 BLOCCO 2x2

$J = \begin{pmatrix} 7/2 & 1 \\ 0 & 7/2 \end{pmatrix} = J_{\mathbb{R}}$ = FORMA DI JORDAN REALE

$\begin{cases} Ax_1 = \lambda x_1 \rightsquigarrow x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ Ax_2 = x_1 + \lambda x_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3/2 & 2 \\ -9/8 & 3/2 \end{pmatrix} x_2 = x_1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ = BASE JORDANIZZ.

$\rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad J_{\mathbb{R}} = M^{-1} A M$

4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 2.

(a) Dimostrare che la formula

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + 3p(1)q(1) + 5p(2)q(2)$$

rappresenta un prodotto scalare definito positivo in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

(b) Determinare la matrice ad esso associata rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.

(c) Determinare una base ortonormale rispetto a tale prodotto scalare.

(a) $\langle p(x), q(x) \rangle$ SODDISFA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

(i) SIMMETRIA $\quad \langle p(x), q(x) \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle$

(ii) LINEARITÀ $\quad \langle p_1 + p_2, q \rangle = \langle p_1, q \rangle + \langle p_2, q \rangle$

$\langle a p, q \rangle = a \langle p, q \rangle \quad \forall a \in \mathbb{R}$

QUINDI DEFINISCE UN PRODOTTO SCALARE POSITIVO, INFATTI:

$\langle p(x), p(x) \rangle = p^2(0) + 3p^2(1) + 5p^2(2) \geq 0 \quad (= \sum \text{TERMINI} \geq 0)$

$= 0 \iff p(0) = p(1) = p(2) = 0 \iff p(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + 3\,p(1)\,q(1) + 5\,p(2)\,q(2)$

$$B = \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle 1,1\rangle = 1+3+5 = 9$$
$$\langle 1,x\rangle = 0+3+10 = 13$$
$$\langle 1,x^2\rangle = 0+3+20 = 23$$

$$\langle x,x\rangle = 0+3+20 = 23$$
$$\langle x,x^2\rangle = 0+3+30 = 33$$
$$\langle x^2,x^2\rangle = 0+3+80 = 83$$

$$\rightarrow B = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 23 \\ 13 & 23 & 33 \\ 23 & 33 & 83 \end{pmatrix}$$

NELLA BASE $\{1, x, x^2\}$

BASE ORTOGONALE

$$\begin{cases} w_1 = 1 \quad w_2 = x - \dfrac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\,1 = x - \dfrac{13}{9} = 9x-13 \\ w_3 = x^2 - \dfrac{\langle x^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\,1 - \dfrac{\langle x^2,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle}\,w_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle x^2,w_2\rangle = (x^2)^T B\, w_2 = (23 \;\; 33 \;\; 83)\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = -299+297 = -2 \\ \langle w_2,w_2\rangle = w_2^T B\, w_2 = (0 \;\; -169+207 \;\; -299+297)\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 342 \end{cases}$$

$$\rightarrow w_3 = x^2 - \frac{23}{9} - \frac{-2}{342}(9x-13) = x^2 - \frac{23}{9} + \frac{9}{171}x - \frac{13}{171} = x^2 + \frac{1}{19}x - \frac{\overset{50\;\cancel{450}}{437+13}}{\cancel{171}\;19}$$

$$= x^2 + \frac{1}{19}x - \frac{50}{19} = 19x^2 + x - 50$$

$$\langle w_3,w_3\rangle = w_3^T B\, w_3 = (-50\cdot 9 + 13 + 19\cdot 23 \;\; -50\cdot 13 + 23 + 19\cdot 33 \;\; -50\cdot 23 + 33 + 19\cdot 83)\begin{pmatrix} -50 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$= (\cancel{-450}\cancel{+13}+\cancel{437} \;\; -\cancel{650}\cancel{+23}+\cancel{627} \;\; -1150+33+1577)\begin{pmatrix} -50 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \;\; 0 \;\; 460)\begin{pmatrix} -50 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = 8740$$

$$
\begin{cases}
w_1^* = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = \dfrac{1}{3} \\[2ex]
w_2^* = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{352}} \left(9x - 13\right) \\[2ex]
w_3^* = \dfrac{w_3}{\|w_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{8750}} \left(13x^2 + x - 50\right)
\end{cases}
$$

$$
M = \begin{array}{ccc} w_1^* & w_2^* & w_3^* \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1/3 & -13/\sqrt{352} & -50/\sqrt{8750} \\ 0 & 9/\sqrt{352} & 1/\sqrt{8750} \\ 0 & 0 & 13/\sqrt{8750} \end{pmatrix}} \end{array} \rightsquigarrow \quad M^{t} B M = I
$$