Università di Pisa – Corso di Laurea in Fisica

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 8 Maggio 2023

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + 2z^2 = 6,\ z \geq 0\right\}$$

e la funzione

$$f(x, y, z) = x - y^2 + z.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione f nell'insieme A precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare anche tutti i punti di minimo/massimo.

2. Sia C il cerchio con centro nell'origine e raggio 2.

Calcolare

$$\int_C |x + y|\, dx\, dy, \qquad\qquad \int_C |x + y - 2|\, dx\, dy.$$

3. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t + t^2, t + t^3) \qquad t \in [0, 1],$$

e il sottoinsieme D del piano limitato dal sostegno di γ e dalla retta $y = x$.

   (a) Determinare la coordinata x del baricentro di D.

   (b) (Bonus question) Determinare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa dell'insieme D intorno alla retta $y = x$.

4. Consideriamo la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + zy^2 + 3z = 6,\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie nel punto $(1, 1, 1)$.

   (b) Determinare il flusso del campo vettoriale $E = (y^4, z^3, x^2)$ attraverso la superficie S, con l'orientazione che punta approssimativamente verso l'asse z.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + 2z^2 = 6,\ z \geq 0\}$$

e la funzione

$$f(x, y) = x - y^2 + z.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione f nell'insieme A precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare anche tutti i punti di minimo/massimo.

L'insieme A è limitato (ad esempio $x, y, z \in [-3, 3]$) e chiuso, la funzione continua. Quindi max e min esistono. Non ha senso cercare p.ti stazionari o singolari interni, perché A non ha p.ti interni.

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$\boxed{1^o \text{ sistema}}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ 4z = 0 \\ x^2 + y^4 + 2z^2 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z = 0, \text{ incompatibile con l'ultima equazione}$$

$\boxed{2^o \text{ sistema}}$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2y = 4\lambda y^3 \\ 1 = 4\lambda z \\ x^2 + y^4 + 2z^2 = 6 \end{cases}$$

1^a e 3^a eq. $\rightsquigarrow$ $x = 2z$

2^a eq $\rightsquigarrow$ $2y(2\lambda y^2 + 1) = 0$

$\rightsquigarrow$ $y = 0$ oppure $y^2 = -\frac{1}{2\lambda} = -x$

- Se $y = 0$ e $x = 2z$, allora $4z^2 + 2z^2 = 6 \rightsquigarrow (x, y, z) = \boxed{(2, 0, 1)}$

La soluz. con $z < 0$ si scarta

- Se $y \neq 0$ non ci sono soluzioni perché dovrebbe essere $y^2 = -x = -2z$, che è impossibile visto che $z \geq 0$.

$\boxed{\text{Bordo del bordo}}$ Quando $z = 0$ dobbiamo studiare la funzione $x - y^2$ nell'insieme $x^2 + y^4 = 6$. (Interpretare con linee di livello)

Passiamo direttamente al secondo sistema (il primo non ha soluz.)

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2y = 4\lambda y^3 \\ x^2 + y^4 = 6 \end{cases}$$

- Se $y = 0$, allora $x = \pm\sqrt{6}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{(\pm\sqrt{6}, 0, 0)}$
- Se $y \neq 0$, allora $y^2 = -x$ $\rightsquigarrow$ $2x^2 = 6$ $\rightsquigarrow$ $x = \pm\sqrt{3}$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{(-\sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, 0)}$

$f(2, 0, 1) = 3$

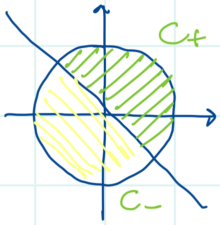
$f(\pm\sqrt{6}, 0, 0) = \pm\sqrt{6}$

$f(-\sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, 0) = -2\sqrt{3}$

Max $= 3$	P.to max $= (2, 0, 1)$
Min $= -2\sqrt{3}$	P.to min $= (-\sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, 0)$

2. Sia C il cerchio con centro nell'origine e raggio 2.

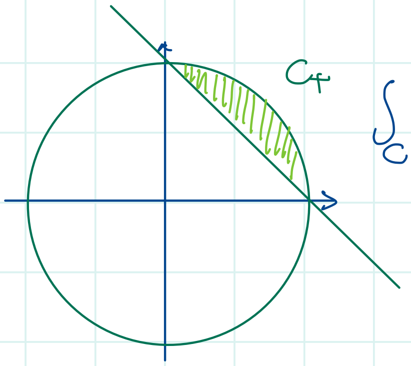
Calcolare
$$\int_C |x+y|\,dx\,dy, \qquad \int_C |x+y-2|\,dx\,dy.$$



$$\int_C |x+y|\,dx\,dy = 2\int_{C_+} (x+y)\,dx\,dy \overset{\text{simmetria}}{=} 4\int_{C_+} x\,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\ \rho\cos\theta\cdot\rho = 4\int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{\rho=2}\left[\sin\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}} = 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\sqrt{2} = \boxed{\frac{32}{3}\sqrt{2}}$$



$$\int_C |x+y-2|\,dx\,dy = \int_C (2-x-y)\,dx\,dy + 2\int_{C_+} (x+y-2)\,dx\,dy$$

$$\int_C (2-x-y)\,dx\,dy \underset{\text{simmetrie}}{=} 2\,\text{Area}(C) = 2\cdot 4\pi = 8\pi$$

$$\int_{C_+} (x+y-2)\,dx\,dy = \int_{C_+} (x+y)\,dx\,dy - 2\,\text{Area}(C_+) = 2\int_{C_+} x\,dx\,dy - 2\,\text{Area}(C_+)$$

$$\text{Area}(C_+) = \text{Area}(\text{Settore}) - \text{Area}(\text{Triangolo}) = \pi - 2$$

$$\int_{C_+} x\,dx\,dy = \int_{\text{Settore}} \dots - \int_{\text{triang}} \dots =$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\theta\cdot\rho\,d\theta - \int_0^2 dx \int_0^{2-x} x\,dy$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^2\,d\rho}_{\frac{8}{3}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta}_{1} - \underbrace{\int_0^2 x(2-x)\,dx}_{\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2} = \frac{8}{3} - 4 + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Mettendo tutto insieme

$$\int_{C_+} |x+y-2|\,dx\,dy = 8\pi - 4(\pi-2) + 4\cdot\frac{4}{3} = 4\pi + 8 + \frac{16}{3} = \boxed{4\pi + \frac{40}{3}}$$

3. Consideriamo la curva

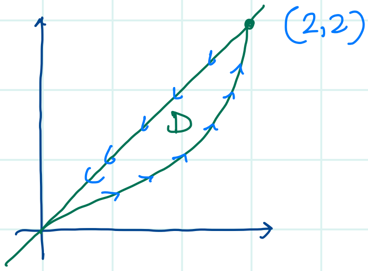
$$\gamma(t) = (t + t^2, t + t^3) \qquad t \in [0, 1],$$

e il sottoinsieme D del piano limitato dal sostegno di γ e dalla retta $y = x$.

(a) Determinare la coordinata x del baricentro di D.

(b) (Bonus question) Determinare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa dell'insieme D intorno alla retta $y = x$.

Intanto osserviamo che $t+t^2 \geq t+t^3$ per ogni $t \in [0,1]$, cioè $x(t) \geq y(t)$.
Questo ci dice che il sostegno della curva sta tutto "sotto" la bisettrice $y=x$.
Inoltre $x(t)$ e $y(t)$ sono monotone $\rightsquigarrow$ γ è semplice



Il bordo di D è quindi costituito da

- la curva γ, con il verso previsto dalla param. data
- il segmento (t,t), con $t \in [0,2]$, percorso al contrario

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial D} x\,dy = \int_0^1 (t+t^2)(1+3t^2)\,dt - \int_0^2 t\,dt$$

$$= \int_0^1 (t+t^2+3t^3+3t^4)\,dt - 2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-2 = \boxed{\frac{11}{60}}$$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{\partial D} x^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (t+t^2)^2(1+3t^2)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^2 t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 (t^2+2t^3+4t^4+6t^5+3t^6)\,dt - \int_0^2 t^2\,dt\right\} = \boxed{\frac{83}{420}}$$

Dividendo otteniamo che $\quad x_G = \dfrac{83}{420}\cdot\dfrac{60}{11} = \boxed{\dfrac{83}{77}}$

poco più di 1: risposta molto ragionevole

(Bonus question) Si tratta di integrare su D la distanza dall'asse di rotazione. La distanza di (x,y) dalla retta $y=x$ è data da $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, per lo meno sotto la bisettrice.

Quindi $\quad \text{Volume} = 2\pi \iint_D \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\,dx\,dy = \pi\sqrt{2}\iint_D (x-y)\,dx\,dy$

$$= \pi\sqrt{2}\int_{\partial D}\left(\frac{1}{2}x^2 - xy\right)dy = \pi\sqrt{2}\left\{\int_0^1 \left[\frac{1}{2}(t+t^2)^2 - (t+t^2)(t+t^3)\right](1+3t^2)\,dt\right.$$

$$\left. - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t^2 - t^2\right)dt\right\} = \dots = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{280}\pi}$$

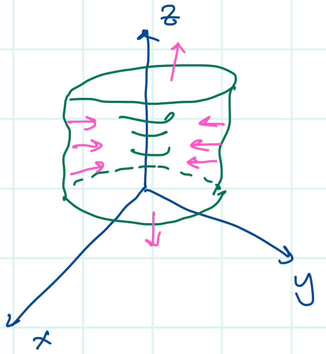
4. Consideriamo la superficie

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+zy^2+3z=6,\ 0\le z\le 1\right\}.$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie nel punto $(1,1,1)$.

(b) Determinare il flusso del campo vettoriale $E=(y^4,z^3,x^2)$ attraverso la superficie S, con l'orientazione che punta approssimativamente verso l'asse z.

Le sezioni di S a z fisso sono delle ellissi con centro nell'origine, quindi S è una specie di "cilindro" che ha come asse l'asse z



(a) Indicata con $g(x,y,z)$ la funzione di cui S è luogo di zeri, osserviamo che

$$\nabla g(x,y,z)=(2x,\ 2y+2yz,\ y^2+3)$$

e quindi $\nabla g(1,1,1)=(2,4,4)$. ← ortogonale al piano

Il piano tangente ha quindi equazione

$$\boxed{x+2y+2z=5}$$ passa per $(1,1,1)$ ed è $\perp$ a $(2,4,4)$

(b) Osserviamo che $\operatorname{div} E=0$, quindi il flusso "entrante" da S è uguale al flusso "uscente" dalle due basi (stiamo pensando al solido limitato da S e dai due "tappi" con $z=0$ e $z=1$). Quindi

$$\int_S \langle \vec{E},\vec{n}\rangle\, d\sigma = \int_{\substack{\text{base}\\ \text{sotto}}} \langle \vec{E},(0,0,-1)\rangle\, d\sigma + \int_{\substack{\text{base}\\ \text{sopra}}} \langle \vec{E},(0,0,1)\rangle\, d\sigma$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 6} -x^2\,dx\,dy + \iint_{x^2+2y^2\le 3} x^2\,dx\,dy = \boxed{-9\pi+\frac{9}{4\sqrt{2}}\pi}$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 6} x^2\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{6}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\ \rho^2\cos^2\theta\cdot\rho = \pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{6}} = 9\pi$$

$$\iint_{x^2+2y^2\le 3} x^2\,dx\,dy = \iint_{u^2+v^2\le 3} u^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,du\,dv = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3\cos^2\theta$$

$$= \frac{9}{4\sqrt{2}}\pi$$