

Scritto d'esame di Complementi di Analisi Matematica

Pisa, 8 Maggio 2023

1. Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + 2z^2 = 6, z \geq 0\}$$

e la funzione

$$f(x, y, z) = x - y^2 + z.$$

Determinare estremo inferiore e superiore della funzione f nell'insieme A precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo. In caso affermativo, determinare anche tutti i punti di minimo/massimo.

2. Sia C il cerchio con centro nell'origine e raggio 2.

Calcolare

$$\int_C |x + y| dx dy, \quad \int_C |x + y - 2| dx dy.$$

3. Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t + t^2, t + t^3) \quad t \in [0, 1],$$

e il sottoinsieme D del piano limitato dal sostegno di γ e dalla retta $y = x$.

(a) Determinare la coordinata x del baricentro di D .

(b) (Bonus question) Determinare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa dell'insieme D intorno alla retta $y = x$.

4. Consideriamo la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + zy^2 + 3z = 6, 0 \leq z \leq 1\}.$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie nel punto $(1, 1, 1)$.

(b) Determinare il flusso del campo vettoriale $E = (y^4, z^3, x^2)$ attraverso la superficie S , con l'orientazione che punta approssimativamente verso l'asse z .

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.