Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 17 Febbraio 2024

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (1, 2, 3), \qquad C = (3, 2, 1), \qquad D = (-1, 2, -1).$$

   (a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta CD forma con il piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare il coseno dell'angolo formato dal piano passante per A, B, C e il piano passante per B, C, D.

   (c) Determinare il simmetrico del punto D rispetto al piano passante per A, B, C.

2. Sia $M_{2\times 2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ l'applicazione lineare definita da

$$A \to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.

   (b) Determinare autovalori e autospazi di f.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica associata a questo prodotto scalare.

   (b) Determinare una matrice M invertibile tale che $M^t BM$ sia diagonale.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1,0,1), \qquad B = (1,2,3), \qquad C = (3,2,1), \qquad D = (-1,2,-1).$$

(a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta CD forma con il piano passante per A, B, C.

(b) Determinare il coseno dell'angolo formato dal piano passante per A, B, C e il piano passante per B, C, D.

(c) Determinare il simmetrico del punto D rispetto al piano passante per A, B, C.

(a) Piano A, B, C : $(1,0,1) + t\,(0,2,2) + s\,(2,2,0)$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \rightsquigarrow (-1,1,-1) \rightsquigarrow \boxed{x - y + z = 2} \quad [\text{Verifica}]$$

Retta $CD = (3,2,1) + t\,(4,0,2) = (3,2,1) + t\,(2,0,1)$

α = angolo tra retta e $\perp$ al piano

β = angolo tra retta e piano

$$\cos\alpha = \frac{\langle (1,-1,1),(2,0,1)\rangle}{\|(1,-1,1)\|\cdot\|(2,0,1)\|} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sin\beta \rightsquigarrow \boxed{\cos\beta = \sqrt{1-\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}}$$

(b) Piano per $B, C, D = (1,2,3) + t\,(2,0,-2) + s\,(-2,0,-4)$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \rightsquigarrow (0,3,0) \rightsquigarrow 3y = 6 \rightsquigarrow \boxed{y = 2} \quad [\text{Verifica}]$$

$$\text{coseno (angolo)} = \frac{|\langle (0,1,0),(1,-1,1)\rangle|}{\|(0,1,0)\|\cdot\|(1,-1,1)\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

il minore tra i due angoli

(c) Retta per D e $\perp$ piano ABC: $(-1,2,-1) + t\,(1,-1,1) = (-1+t, 2-t, -1+t)$

Intersezione retta/piano: $-1+t-2+t-1+t = 2 \rightsquigarrow 3t = 6 \rightsquigarrow t = 2$

H = proiezione di D su piano ABC = $(1,0,1)$ [Verifica: $H \in$ piano, $D-H \perp$ piano]

Simmetrico di D rispetto al piano

$$= D + 2\,(H-D) = (-1,2,-1) + 2\,(2,-2,2) = \boxed{(3,-2,3)} = D'$$

[Verifica: $D'-D \perp$ piano e $\frac{D+D'}{2} \in$ piano]

—— o —— o ——

2. Sia $M_{2\times 2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ l'applicazione lineare definita da

$$A \to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.

(b) Determinare autovalori e autospazi di f.

(a) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+4b \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}$$

La matrice associata nella base canonica è $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si vede a occhio che il rango è 2 ($C_2 = 2C_1$, $C_4 = 2C_3$) e una base del ker è $\{(2,-1,0,0), (0,0,2,-1)\}$, mentre una base dell'immagine è $\{(1,2,0,0), (0,0,1,2)\}$. Ritornando in $M_{2\times 2}$ abbiamo

$$\boxed{\ker = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{Im} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}}$$

(b) Già sappiamo che $\lambda = 0$ è autov. con molt. geom. $= 2$ e autosp. $= \ker$

Il polinomio caratteristico è $(\lambda^2 - 5\lambda)^2$ per cui il restante autovalore è $\lambda = 5$, sempre molt. alg. $= 2$. Per l'autospazio basta cercare il ker di

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \ker = \text{Span}((1,2,0,0), (0,0,1,2))$$

e tornando alle matrici

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Autospazio di } \lambda = 5 \text{ è } \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\} \\ &\text{Autospazio di } \lambda = 0 \text{ è } \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}}$$
$= \text{Im}$

$= \ker$

— o — o —

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

Servono autovalori e autovettori. Volendo si può procedere a occhio.

→ Osserviamo che rango$(A) = 2$, quindi $\lambda = 0$ è autovalore con $mg(0) = 2$ e l'autospazio è $\mathrm{Span}\{(1,0,-1,0), (0,1,0,0)\}$

→ Osserviamo che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, quindi $\lambda = 8$ è autovalore con autovettore $(1,0,1,1)$

→ Il restante autovalore sarà quindi $\lambda = -4$ (infatti Traccia $= 4$) con autospazio

$$\ker \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\{(1,0,1,-2)\}$$

(infatti $C_1 + C_3 = 2C_4$, come si vede a occhio o risolvendo il sistema)

Di conseguenza

$$M^{-1} A M = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

[Verifica, anche nella versione soft $AM = MD$]

In alternativa si poteva calcolare il polinomio caratteristico sviluppando $\mathrm{Det}(A - \lambda Id)$. Ovviamente veniva $\lambda^2(\lambda+4)(\lambda-8)$

— o — o —

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la segnatura della forma quadratica associata a questo prodotto scalare.

(b) Determinare una matrice M invertibile tale che $M^t B M$ sia diagonale.

(a) Sylvester 1-2-3: $\mathrm{Det}_{1\times 1} = 2$

$+ + + -$

P P V

$\mathrm{Det}_{2\times 2} = 3$

$\mathrm{Det}_{3\times 3} = 8 - 18 - 2 = -12$

$\boxed{\text{Segnatura } + + -}$

(b) Cerco base Sylvesterizzante. Parto con $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (0,1,0)$.

Ora correggo v_2 con GS:

$$v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$\leadsto$ uso per ora $(1,-2,0)$

Cerco ora un terzo vettore B-ortogonale ai 2 precedenti

$$(1\ 0\ 0)\, B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2a + b + 3c$$

$$(1\ {-2}\ 0)\, B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -3b + 3c$$

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$c = t,\ b = t,\ a = -2t$

Quindi posso usare $(-2,1,1)$. Di conseguenza

$\{(1,0,0), (1,-2,0), (-2,1,1)\}$ è una base B-ortogonale.

A questo punto basta porre

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

e osservare che $M^t B M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Dividendo le 3 colonne, rispettivamente, per $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2$, otteniamo che la matrice diagonale assume la forma alla Sylvester.

— o — o —

Alternativa (sia per la segnatura, sia per il p.to (b)): diagonalizzare B mediante una matrice ortogonale M (cioè trovare autovalori ed una base ortonormale di autovettori).

— o — o —