Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 17 Febbraio 2024

1. Consideriamo i seguenti quattro punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (1, 2, 3), \qquad C = (3, 2, 1), \qquad D = (-1, 2, -1).$$

   (a) Determinare il coseno dell'angolo che la retta CD forma con il piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare il coseno dell'angolo formato dal piano passante per A, B, C e il piano passante per B, C, D.

   (c) Determinare il simmetrico del punto D rispetto al piano passante per A, B, C.

2. Sia $M_{2\times 2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e sia $f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ l'applicazione lineare definita da

$$A \to A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare una base del ker e una base dell'immagine di f.

   (b) Determinare autovalori e autospazi di f.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare rappresentato, nella base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica associata a questo prodotto scalare.

   (b) Determinare una matrice M invertibile tale che M^tBM sia diagonale.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.