Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 27 Gennaio 2024

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (4, 3, 7), \qquad B = (-2, 5, -1), \qquad C = (1, -1, -1).$$

   (a) Determinare il seno dell'angolo in C, precisando se si tratta di una angolo acuto o ottuso.

   (b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

   (c) Determinare le coordinate del punto di intersezione tra l'altezza uscente dal vertice A e la mediana uscente dal vertice B (la mediana è la retta che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto).

2. Consideriamo, al variare dei parametri reale a e b, le tre rette nel piano di equazione

$$x + y = b, \qquad ax + 3y = 7, \qquad 5x - y = 8.$$

   (a) Stabilire per quali valori di a e di b le prime due rette formano un angolo di 30°.

   (b) Nel caso particolare $b = 4$, determinare per quali valori di a le tre rette hanno un punto in comune.

   (c) Determinare, in funzione di b, quanti sono i valori di a per cui le tre rette hanno un punto in comune.

3. Consideriamo, al variare del parametro reale a, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Nel caso particolare $a = 3$, trovare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

   (b) Determinare per quali valori di a la matrice A ha tre autovalori reali distinti.

   (c) Determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalizzabile sui reali.

4. Consideriamo il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = x - z - w = 0\right\}.$$

   (a) Determinare una base ortogonale di W ed una base ortogonale di $W^\perp$, entrambe costituite da vettori a coordinate intere.

   (b) Determinare la proiezione ortogonale su W del vettore $(1, 2, 3, 4)$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (4, 3, 7), \qquad B = (-2, 5, -1), \qquad C = (1, -1, -1).$$

(a) Determinare il seno dell'angolo in C, precisando se si tratta di una angolo acuto o ottuso.

(b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A.

(c) Determinare le coordinate del punto di intersezione tra l'altezza uscente dal vertice A e la mediana uscente dal vertice B (la mediana è la retta che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto).

(a) $A-C = (3,4,8) \qquad B-C = (-3,6,0) \rightsquigarrow (-1,2,0)$ ai fini degli angoli

$$\cos\alpha = \frac{\langle (3,4,8),(-1,2,0)\rangle}{\|(3,4,8)\|\cdot\|(-1,2,0)\|} = \frac{5}{\sqrt{89}\,\sqrt{5}} \rightsquigarrow \boxed{\text{ACUTO}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{5}{89}} = \boxed{\sqrt{\frac{84}{89}}}$$

(b) Retta BC: $(1,-1,-1)+t(-1,2,0) = (1-t,-1+2t,-1)$

Piano per A e ⊥ a retta BC: $\boxed{x-2y=-2}$

Intersezione:

$$1-t+2-4t=-2 \rightsquigarrow t=1 \rightsquigarrow \boxed{(0,1,-1)} = H$$

(c) Altezza AH: $H+t(A-H) = (0,1,-1)+t(4,2,8) = (2t, 1+t, -1+4t)$

M = p.to medio AC $= \left(\frac{5}{2}, 1, 3\right)$

Mediana BM $= B+s(B-M) = (-2,5,-1)+s\left(-\frac{9}{2},4,-4\right)$
$= (-2-9s, 5+8s, -1-8s)$

Intersezione:

$$\begin{cases} -2-9s = 2t \\ 5+8s = 1+t \\ -1-8s = -1+4t \rightsquigarrow t=-2s \end{cases}$$

$10s=-4 \rightsquigarrow s=-\frac{2}{5},\ t=\frac{4}{5}$

$-2+\frac{18}{5} = \frac{8}{5}$:)

L'intersezione è $\boxed{\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5},\frac{11}{5}\right)}$

— o — o —

2. Consideriamo, al variare dei parametri reale a e b, le tre rette nel piano di equazione

$$x + y = b, \qquad ax + 3y = 7, \qquad 5x - y = 8.$$

(a) Stabilire per quali valori di a e di b le prime due rette formano un angolo di 30°.

(b) Nel caso particolare $b = 4$, determinare per quali valori di a le tre rette hanno un punto in comune.

(c) Determinare, in funzione di b, quanti sono i valori di a per cui le tre rette hanno un punto in comune.

(a) La condizione è che $(1,1)$ e $(3,a)$ formino un angolo di 30°

$$\frac{|3+a|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+9}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow 2(a+3)^2 = 3(a^2+9) \rightsquigarrow 2a^2+12a+18 = 3a^2+27$$

$$\rightsquigarrow a^2 - 12a + 9 = 0 \rightsquigarrow a = 6 \pm \sqrt{27} = \boxed{6 \pm 3\sqrt{3}}$$

(b) Intersecare le rette equivale a risolvere $\begin{cases} x+y = b \\ ax+3y = 7 \\ 5x-y = 8 \end{cases}$

Se $b = 4$, la 1ª e 3ª eq. diventano $x+y = 4$, $5x-y = 8$

da cui $x = 2$ e $y = 2$. Sostituendo nella seconda si ottiene

$2a+6 = 7 \rightsquigarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$ ← unico valore per cui le rette passano per uno stesso p.to, che poi è $(2,2)$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ a & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ Siano A la matrice 3×2 dei coeff. e B la matrice 3×3 completa. Allora Rango (A) = 2 (1ª e 3ª riga lin. indip.). Per esserci soluzione deve essere Rango (B) = 2, il che accade se e solo se Det = 0

$\operatorname{Det} B = 24 + 35 - ab - 15b - 8a + 7 = -a(b+8) + 66 - 15b.$

Abbiamo quindi due casi

→ se $b = -8$, allora $\operatorname{Det}(B) \neq 0$, quindi non c'è mai soluzione, indipendentemente da a.

→ se $b = -8$, allora c'è esattamente un valore di a per cui $\operatorname{Det} B = 0$ (e quindi le 3 rette passano per un p.to comune)

Alternativa per (c). Alla condizione $-a(b+8) + 66 - 15b = 0$ si arrivava anche trovando (x,y) dalla 1ª e 3ª eq. e sostituendo poi nella 2ª.

— o — o —

3. Consideriamo, al variare del parametro reale a, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Nel caso particolare $a = 3$, trovare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

(b) Determinare per quali valori di a la matrice A ha tre autovalori reali distinti.

(c) Determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalizzabile sui reali.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- La matrice ha rango 2 (1^a colonna $= 3^a$ colonna) $\rightsquigarrow$ $\lambda = 0$ è autovalore con autovettore $(1,0,-1)$
- $\lambda = 1$ è autovalore con autovettore $(0,1,0)$
- Guardando la traccia si deduce che $\lambda = 5$ è il terzo autovalore

$$A - 5Id = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad Ker = Span((2,0,3))$$

Quindi avremo che

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

[Fare la verifica, o diretta o nella versione soft $AM = MD$ diagonale]

(b) Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 - (a+2)\lambda + 2a - 6]$

Tr e Det della 2x2 "ai vertici"

Di conseguenza gli autovalori sono $\lambda = 1$ e le due radici di $\lambda^2 - (a+2)\lambda + 2a - 6 = 0$.

Il discriminante è $(a+2)^2 - 8a + 24 = a^2 - 4a + 28 = (a-2)^2 + 24 > 0$ sempre, quindi ci sono sempre due radici reali distinte. Quando una di queste è uguale a 1? Quando $1 - (a+2) + 2a - 6 = 0$, cioè $a = 7$.

Di conseguenza A ha 3 autovalori reali distinti $\boxed{\text{se e solo se } a \neq 7}$.

(c) Per $a \neq 7$ di sicuro è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ (3 autov. reali distinti)

Per $a = 7$ diventa $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ che ha come autovalori 1, 1, 8 (1 e 1 già lo sappiamo, 8 segue da Tr). D'altra parte $A - Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

che ha rango $= 1$, quindi $m_g(1) = m_a(1) = 2$.

Quindi A è diagonalizzabile $\boxed{\text{per ogni } a \in \mathbb{R}}$.

4. Consideriamo il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = x - z - w = 0\}.$$

(a) Determinare una base ortogonale di W ed una base ortogonale di $W^\perp$, entrambe costituite da vettori a coordinate intere.

(b) Determinare la proiezione ortogonale su W del vettore $(1,2,3,4)$.

(a) $W = \text{Span}(\underset{v_1}{(1,-1,1,0)}, \underset{v_2}{(0,0,1,-1)})$

Ortogonalizzo con GS

$$v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (0,0,1,-1) - \frac{1}{3}(1,-1,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$$

Una possibile base ortogonale di W è $\boxed{\{(1,-1,1,0), (1,-1,-2,3)\}}$

$W^\perp$ è costituito dai vettori (a,b,c,d) tali che

$$\begin{cases} a-b+c = 0 \\ a-b-2c+3d = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a-b+c = 0 \\ 3c-3d = 0 \end{cases} \quad d=t, c=t, b=s, a=s-t$$

Quindi $(a,b,c,d) = (s-t, s, t, t) = t\underset{v_3}{(-1,0,1,1)} + s\underset{v_4}{(1,1,0,0)}$

verifico che sono $\perp$ ai precedenti

Applico nuovamente GS

$$v_4 - \frac{\langle v_4, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle} v_3 = (1,1,0,0) - \frac{-1}{3}(-1,0,1,1) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Una possibile base ortogonale di $W^\perp$ è $\{(-1,0,1,1), (2,3,1,1)\}$

verifico che sono $\perp$ tra di loro e alla base di W trovata prima

(b)
$$\frac{\langle (1,2,3,4), (1,-1,1,0)\rangle}{\langle (1,-1,1,0), (1,-1,1,0)\rangle}(1,-1,1,0) + \frac{\langle (1,2,3,4), (1,-1,-2,3)\rangle}{\langle (1,-1,-2,3), (1,-1,-2,3)\rangle}(1,-1,-2,3)$$

$$= \frac{2}{3}(1,-1,1,0) + \frac{5}{15}(1,-1,-2,3) = \boxed{(1,-1,0,1)}$$

Verifica: $(1,2,3,4) = \underset{\in W}{(1,-1,0,1)} + \underset{\in W^\perp}{(0,3,3,3)}$

— o — o —