

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 27 Gennaio 2024

1. Consideriamo nello spazio il triangolo con vertici nei punti

$$A = (4, 3, 7), \quad B = (-2, 5, -1), \quad C = (1, -1, -1).$$

- (a) Determinare il seno dell'angolo in C , precisando se si tratta di un angolo acuto o ottuso.
 - (b) Determinare il piede dell'altezza uscente dal vertice A .
 - (c) Determinare le coordinate del punto di intersezione tra l'altezza uscente dal vertice A e la mediana uscente dal vertice B (la mediana è la retta che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto).
2. Consideriamo, al variare dei parametri reale a e b , le tre rette nel piano di equazione

$$x + y = b, \quad ax + 3y = 7, \quad 5x - y = 8.$$

- (a) Stabilire per quali valori di a e di b le prime due rette formano un angolo di 30° .
 - (b) Nel caso particolare $b = 4$, determinare per quali valori di a le tre rette hanno un punto in comune.
 - (c) Determinare, in funzione di b , quanti sono i valori di a per cui le tre rette hanno un punto in comune.
3. Consideriamo, al variare del parametro reale a , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Nel caso particolare $a = 3$, trovare una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.
 - (b) Determinare per quali valori di a la matrice A ha tre autovalori reali distinti.
 - (c) Determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalizzabile sui reali.
4. Consideriamo il sottospazio W di \mathbb{R}^4 definito da

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = x - z - w = 0\}.$$

- (a) Determinare una base ortogonale di W ed una base ortogonale di W^\perp , entrambe costituite da vettori a coordinate intere.
- (b) Determinare la proiezione ortogonale su W del vettore $(1, 2, 3, 4)$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.