Università di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Prova in Itinere di Algebra Lineare

Pisa, 13 Gennaio 2024

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (0, 1, 2), \qquad B = (3, -1, 0), \qquad C = (1, 1, 1).$$

   (a) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per A, B, C.

   (b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

   (c) Determinare il punto della retta AC più vicino all'asse x.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z))

$$\begin{aligned} x + ay + 4z &= 4, \\ x - z &= 7, \\ y + 5z &= b. \end{aligned}$$

   (a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ha soluzioni.

   (b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha soluzione unica.

   (c) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha infinite soluzioni, ed il tali casi determinare anche l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 - 2xz + 4yz.$$

   (a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

   (b) Nel caso particolare $a = 7/4$, determinare una terna di numeri interi (x, y, z) tali che $q(x, y, z) < 0$.

4. Consideriamo, nello spazio $\mathbb{R}^3$, il piano p di equazione $x - y + 3z = 0$ e il punto $Q = (1, -2, 4)$.

   (a) Scrivere la matrice che, rispetto alla basa canonica, rappresenta la proiezione ortogonale su p.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine di p quando si esegue la simmetria centrale rispetto a Q.

> Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
> Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Consideriamo nello spazio i seguenti tre punti:

$$A = (0,1,2), \qquad B = (3,-1,0), \qquad C = (1,1,1).$$

(a) Determinare il punto più vicino all'origine nel piano passante per A, B, C.

(b) Determinare il punto della retta AB più vicino a C.

(c) Determinare il punto della retta AC più vicino all'asse x.

(a) $B-A = (3,-2,-2)$, $C-A = (1,0,-1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2,1,2) \rightsquigarrow \boxed{2x+y+2z=5}$$ piano per A, B, C

(verifica a occhio!)

retta per origine e $\perp$ al piano: $(2t, t, 2t)$.

Intersezione $\quad 4t+t+4t=5 \rightsquigarrow t=\frac{5}{9} \rightsquigarrow \boxed{\left(\frac{10}{9}, \frac{5}{9}, \frac{10}{9}\right)}$

(b) retta $AB = A+t(B-A) = (0,1,2)+t(3,-2,-2) = (3t, 1-2t, 2-2t)$

Piano per C e $\perp$ alla retta: $3x-2y-2z=-1$

Intersezione: $9t-2+4t-4+4t=-1 \rightsquigarrow t=\frac{5}{17} \rightsquigarrow \boxed{\left(\frac{15}{17}, \frac{7}{17}, \frac{24}{17}\right)}$

(c) retta AC: $A+t(C-A) = (0,1,2)+t(1,0,-1) = (t,1,2-t)$

Asse x: $(s,0,0)$

Differenza: $(t-s, 1, 2-t) \rightsquigarrow$ deve essere $\perp$ a $(1,0,-1)$ e $(1,0,0)$

$$\begin{cases} t-s-2+t=0 \\ t-s=0 \end{cases}$$ $t=s=2 \rightsquigarrow$ il p.to che minimizza la distanza è $\boxed{(2,1,0)}$

(verifica che $(2,1,0)-(2,0,0)$ è $\perp$ ai 2 vettori ...)

Alternativa per (b). Pongo $P=(3t, 1-2t, 2-2t)$ e cerco t in modo che $C-P$ sia $\perp$ a $(3,-2,-2)$, oppure in modo che $\|C-P\|^2$ sia minimo

— o — o —

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare (nelle incognite (x, y, z))

$$\begin{aligned} x + ay + 4z &= 4, \\ x - z &= 7, \\ y + 5z &= b. \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori di a e b il sistema non ha soluzioni.

(b) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha soluzione unica.

(c) Determinare per quali valori di a e b il sistema ha infinite soluzioni, ed il tali casi determinare anche l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & b \end{pmatrix}$$

Sia A la matrice dei coeff. (3×3)

Sia B la matrice completa (3×4)

$\text{Det}(A) = 4 - 5a + 1 = 5 - 5a$. Quindi

→ se $a \neq 1$, allora Rango $(A) = 3$ e Rango $(B) = 3$, quindi sol. unica

→ se $a = 1$, allora Rango $(A) = 2$ (esiste minore 2×2 diverso da 0) e occorre guardare Rango (B). Guardo ultime tre colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & b \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = -b + 28 + 4 - 35 = -b - 3$ quindi

- se $b \neq -3$, allora Rango $(B) = 3$ e non ci sono soluzioni
- se $b = -3$, allora Rango $(B) = 2$ $(C_1 = 5C_2 - C_3,\ C_4 = 32C_2 - 7C_3)$

A questo punto possiamo concludere

(a) $\boxed{a = 1 \text{ e } b \neq -3}$ In tal caso Rango $(A) = 2$ e Rango $(B) = 3$

(b) $\boxed{a \neq 1 \text{ e } b \text{ qualunque}}$ In tal caso Rango $(A) =$ Rango $(B) = 3$

(c) $\boxed{a = 1 \text{ e } b = -3}$ In tal caso Rango $(A) =$ Rango $(B) = 2$ quindi infinite sol. che dipendono da un parametro

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$z = t,\ y = -3 - 5t$

$x = 4 - y - 4z = 4 + 3 + 5t - 4t = 7 + t$

$(x, y, z) = (7 + t, -3 - 5t, t)$

$$\boxed{(x, y, z) = \underbrace{(7, -3, 0)}_{\text{risolve sist. non omog}} + t\,\underbrace{(1, -5, 1)}_{\text{risolve sist. omogeneo}}}$$

— o — o —

3. Consideriamo la forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 - 2xz + 4yz.$$

(a) Determinare la segnatura della forma quadratica al variare del parametro reale a.

(b) Nel caso particolare $a = 7/4$, determinare una terna di numeri interi (x, y, z) tali che $q(x, y, z) < 0$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Sylvester 1-3-2

$\mathrm{Det}_{1\times1} = 1$ $\quad$ $\mathrm{Det}_{3\times3} = 3a - a - 4 = 2a - 4$

$\mathrm{Det}_{2\times2} = 2$

- Se $a > 2$, allora $+++$ $\leftarrow$ segui $\boxed{+}+++$ $\rightsquigarrow$ 3P
- Se $a < 2$, allora $++-$ $\leftarrow$ segui $\boxed{+}++-$ $\rightsquigarrow$ 2P e 1N
- Se $a = 2$, allora $++0$ $\leftarrow$ esiste autovalore nullo, e q è def. pos. sul s.sp. generato da $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$

(b) Osservo che $\quad q(x,y,z) = (x-z)^2 + 2(y+z)^2 + (a-2)y^2$

Quindi per ogni $a < 2$ si ha che $\boxed{q(1,-1,1) < 0}$

$\uparrow$ risolve $x - z = y + z = 0$

Alternativa per (a): La segnatura si deduce anche facilmente dal completamento dei quadrati

— o — o —

4. Consideriamo, nello spazio $\mathbb{R}^3$, il piano p di equazione $x - y + 3z = 0$ e il punto $Q = (1, -2, 4)$.

   (a) Scrivere la matrice che, rispetto alla basa canonica, rappresenta la proiezione ortogonale su p.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana dell'immagine di p quando si esegue la simmetria centrale rispetto a Q.

(a) L'ortogonale del piano è Span $((1,-1,3))$

Quindi la proiezione ortogonale sull'ortogonale è

$$(x,y,z) \to \frac{\langle (x,y,z),(1,-1,3)\rangle}{\langle (1,-1,3),(1,-1,3)\rangle}(1,-1,3) = (x-y+3z)\frac{1}{11}(1,-1,3)$$

che ha come matrice

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = M$$

[Verifica: le colonne sono $\perp$ al piano]

Quindi la proiezione è $Id - M$, cioè

$$\boxed{\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

[Verifica: le colonne stanno su p]

(b) Simmetria centrale rispetto a Q:

$(x,y,z) \rightsquigarrow (x-1, y+2, z-4) \rightsquigarrow (1-x, -y-2, 4-z) \rightsquigarrow (2-x, -4-y, 8-z)$

Piano p in parametrica: $t(1,1,0) + s(0,3,1) = (t, t+3s, s)$

Immagine di p in parametrica

$$(2-t, -4-t-3s, 8-s) = (2,-4,8) + t(-1,-1,0) + s(0,-3,-1)$$
$$= (2,-4,8) + t(1,1,0) + s(0,3,1)$$

Quindi si tratta del piano parallelo a p che passa per $(2,-4,8)$

cioè

$$\boxed{x - y + 3z = 30}$$

Alternativa per (a): Determino una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ con v_1 e v_2 in p e v_3 ortogonale a p. Poi cerco $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = 0$

— o — o —